

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：52301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840030

研究課題名(和文) 図式による結び目理論の研究とその応用

研究課題名(英文) Study of knot diagrams

研究代表者

清水 理佳 (Shimizu, Ayaka)

群馬工業高等専門学校・その他部局等・助教

研究者番号：40638764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：結び目の図式に対して、ひずみ度行列という行列を定義した。ひずみ度行列とはひずみ多項式よりも多くの情報をもつものである。ひずみ度行列は球面上の向き付けられた結び目図式を、鏡像を除いて一意に表すということを示した。

共同研究により、空間グラフの図式における領域交差交換による交差交換の実現の条件を求めた。

結び目射影図の既約性についても調べた。結び目射影図に対して既約度という概念を導入し、任意の結び目射影図は既約度が4以下であるということを示した。

研究成果の概要(英文)：I defined a matrix by using warping degrees which represents an oriented knot diagram on the sphere uniquely up to mirror image. This matrix is stronger than the warping polynomial which was also defined via warping degrees.

I studied the reductivity of spherical curves and found that every spherical curve has the reductivity four or less.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ひずみ度 領域交差交換 ひずみ多項式 既約度

1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目図式に対して、研究代表者により「ひずみ多項式」という多項式が定義されていた。この多項式は向き付けられた結び目の図式に対して定義された多項式であり、結び目そのものの不変量ではないが、結び目の交代性などをよく表し、交点数とも相性の良い多項式である。また後に、複数の方法で仮想結び目や仮想絡み目の多項式不変量の構成にも応用されている。

(2) Kishimoto による「結び目図式において領域交差交換は結び目解消操作であるか」という問題に対して研究代表者によって肯定的な解答を与えられていた。すなわち、結び目図式において任意の交差交換が有限回の領域交差交換によって実現されることが示されていた。さらに、Cheng によって、絡み目図式において交差交換が領域交差交換によって実現されるための必要十分条件が与えられていた。

2. 研究の目的

(1) 研究の目的の一つ目は、ひずみ多項式の改良であった。具体的には、ひずみ多項式の、結び目不変量への改良、あるいはひずみ多項式から結び目不変量を取り出すことであった。

(2) 二つ目は、領域結び目解消数の評価であった。結び目図式、および結び目に対して定義されている領域結び目解消数を、よりよく評価し、加法性についても明らかにすることであった。

また、共同研究による領域交差交換のゲーム等への応用およびそのための基礎研究も目的であった。

3. 研究の方法

(1) ひずみ多項式を結び目不変量に応用するための方法の一つとして、絡み目図式に対してもひずみ多項式を定義し、そのスケイン関係式を求めるということを試みた。また、結び目図式に対して与えられるひずみ度ラベリングというラベリングから結び目の情報を取り出すということも試みた。ひずみ度ラベリングとはひずみ多項式を計算する際に用いられ、ひずみ多項式よりも多くの情報を持っているものである。

(2) 領域結び目解消数について調べるために、まず始めに領域交差交換についてよりよく調べる必要があった。また研究当初に研究代表者によって与えられていた、領域結び目解消数と交点数に関する不等式において、等号が成り立つことがあるかどうかを明らかにし、よりよい評価を与えることを試みた。

結び目図式の領域交差交換を考える上で、結び目図式の形そのもの、すなわち結び目射影図についても深く考察する必要があった。とくにその既約性について既存の概念

以上のもを用いてよりよく調べる必要があった。

4. 研究成果

(1) 絡み目図式に対してもひずみ多項式を定義しスケイン関係式を求めることについては、複数の成分をもつ絡み目図式に効率的にひずみ多項式を定義することが難しく、期間中にはうまくいかなかった。

その一方で、ひずみ度ラベリングに着目しひずみ度の分布を利用して、向き付けられた結び目図式を行列により、鏡像を除いて一意に記述することに成功した。

(2) 共同研究により、空間グラフの図式に対しても領域交差交換による交差交換の実現について調べた。現在論文を準備中である。

領域結び目解消数の評価及び加法性について、進んだ結果を得ることはできなかったが、国際会議等に参加し関連研究について情報収集や議論をすることができた。これらについて引き続き取り組んでいるところである。

結び目射影図の既約性に関する研究として、既約な結び目射影図がどれくらい既約であるかを表す既約度というものを、局所変形である半ひねりスプライス等を用いて定義した。任意の結び目射影図は既約度が4以下であるということを示し論文発表した。また、同論文中で、任意の結び目射影図は既約度が3以下であるか、という問題提起をし、それに関連して結び目射影図の領域の不可避集合についても調べた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計5件)

①A. Shimizu, The reductivity of spherical curves, *Topology and its Applications* に掲載決定済み, 査読有

②A. Shimizu, The warping polynomial of a knot diagram, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, 21 (2012), 1250124 [15 pages]

DOI: 10.1142/S0218216512501246

③A. Shimizu, A game based on knot theory, *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, 査読無, 2 (2012), pp. 22-23

④N. Ito and A. Shimizu, The half-twisted splice operation on reduced knot projections, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, 21 (2012), 1250112 [10 pages]

DOI: 10.1142/S021821651250112X

⑤清水理佳, 結び目理論をゲームに応用する, *数学通信*, 査読無, 第17巻 (2012), pp. 6-10.

[学会発表] (計 29 件)

- ① A. Shimizu, Region crossing change on spatial-graph diagrams (joint with K. Hayano and R. Shinjo), Geometric Topology Seminar, 2014 年 3 月 28 日, Beijing Normal University (中国)
- ② 清水理佳, 結び目理論から生まれたゲームとパズルについて, 組合せ数学セミナー, 2014 年 2 月 7 日, 東京大学
- ③ 清水理佳, 結び目の射影図のひずみ度行列について, 岐阜大学トポロジーセミナー, 2014 年 2 月 5 日, 岐阜大学
- ④ A. Shimizu, Region crossing change on knot, link and spatial-graph diagrams, Advanced School and Discussion Meeting on Knot Theory and its Applications, IISER Mohali (インド)
- ⑤ 清水理佳, 結び目, 絡み目, および空間グラフの図式における, 領域交差交換による交差交換の実現について, 埼玉大学木曜セミナー, 2013 年 11 月 14 日, 埼玉大学
- ⑥ 清水理佳, 結び目の領域交差交換とゲームについて, 小山高専数学談話会, 2013 年 11 月 7 日, 小山工業高等専門学校
- ⑦ K. Hayano, A. Shimizu and R. Shinjo, Region crossing change on spatial graphs, American Mathematical Society Western Fall Sectional Meeting, 2013 年 11 月 3 日, University of California, Riverside (アメリカ)
- ⑧ 清水理佳, 空間グラフの図式における領域交差交換について (新庄玲子氏, 早野健太氏との共同研究), 東工大トポロジーセミナー, 2013 年 10 月 23 日, 東京工業大学
- ⑨ 清水理佳, 新庄玲子, 早野健太, 空間グラフにおける領域交差交換について, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学
- ⑩ 清水理佳, 穴あき円盤内の単純曲線について part I, 2013 琉球結び目セミナー, 2013 年 9 月 12 日, てんぶす那覇
- ⑪ A. Shimizu, The reducivity of knot projections, The 6th Japan-Mexico Topology Symposium, 2013 年 9 月 5 日, 島根大学
- ⑫ A. Shimizu, Region crossing change on spatial-graph diagrams, Spatial Graphs Conference, 2013 年 6 月 8 日, Loyola Marymount University (アメリカ)
- ⑬ A. Shimizu, Region crossing change on spatial-graphs, Mathematics Seminar Series, 2013 年 5 月 6 日, Indian Institute of Technology Ropar (インド)
- ⑭ A. Shimizu, The reducivity of knot projections, Topology Seminar, 2013 年 3 月 5 日, University of California, Santa Barbara (アメリカ)
- ⑮ 清水理佳, ひずみ多項式を用いた結び目の研究, 大阪市立大学 2012 年度数学研究会特別賞受賞講演, 2013 年 2 月 22 日, 大阪市立大学

- ⑯ 清水理佳, Irreducibility and reducibility of knot projections, E-KOOK セミナー, 2013 年 2 月 14 日, 大阪市立大学
- ⑰ A. Shimizu, Measuring how reduced a spherical curve is, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics, 2013 年 1 月 14 日, 東京大学
- ⑱ 清水理佳, 球面上の結び目射影図の領域の不可避集合について, 研究集会「結び目の数学 V」, 2012 年 12 月 23 日, 早稲田大学
- ⑲ 清水理佳, 平面曲線の既約度について, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2012 年 12 月 22 日, 東京女子大学
- ⑳ 清水理佳, Unavoidable sets of regions for knot projections, 組合せ論セミナー, 2012 年 12 月 17 日, 慶応義塾大学
- ㉑ A. Shimizu, The reducivity of spherical curves, Friday Seminar on Knot Theory, 2012 年 12 月 17 日, 大阪市立大学
- ㉒ 清水理佳, 結び目の射影図の既約度と不可避集合について, 第 24 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2012 年 11 月 17 日, 横浜国立大学
- ㉓ 清水理佳, 結び目の射影図の既約度について, 奈良女子大学数学教室談話会, 2012 年 10 月 25 日, 奈良女子大学
- ㉔ 清水理佳, 結び目理論から生まれたゲームとスイッチについて, 数理科学情報セミナー, 2012 年 10 月 17 日, 広島大学
- ㉕ 清水理佳, 結び目理論を応用したゲームとスイッチ, 数学ソフトウェアとフリードキュメント, 2012 年 9 月 17 日, 九州大学
- ㉖ 清水理佳, 結び目射影図の領域の不可避集合について, 2012 琉球結び目セミナー, 2012 年 9 月 3 日
- ㉗ 清水理佳, 結び目射影図の既約度について, 神戸トポロジーセミナー, 2012 年 7 月 14 日, 神戸大学
- ㉘ A. Shimizu, The half-twisted splice operation on reduced knot projections, Friday Seminar on Knot Theory, 2012 年 5 月 11 日, 大阪市立大学
- ㉙ 清水理佳, 既約な結び目射影図における半ひねりスプライスについて, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 2012 年 5 月 8 日, 広島大学

[図書] (計 1 件)

- ① 河内明夫, 岸本健吾, 清水理佳, 朝倉書店, 結び目理論とゲーム-領域選択ゲームでみる数学の世界-, 2013, 全 128 ページ (内 pp. 20-32, 53-71 を担当)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 1 件)
名称: スイッチングシステム
発明者: 河内明夫, 岸本健吾, 清水理佳
権利者: 大阪市立大学
種類: 特許
番号: 特願 2012-094282

出願年月日：2012年4月17日

国内外の別：国内

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.nat.gunma-ct.ac.jp/~shimizu/
index.html](http://www.nat.gunma-ct.ac.jp/~shimizu/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

清水 理佳 (SHIMIZU, Ayaka)

群馬工業高等専門学校・一般教科（自然科学）・助教

研究者番号：40638764