

機関番号：17102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840033

研究課題名(和文) 保型表現のリフトとL函数

研究課題名(英文) Liftings of automorphic representations and L-functions

研究代表者

山名 俊介 (Yamana, Shunsuke)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・助教

研究者番号：50633301

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：テータリフトが消えないための必要十分条件を与えた。様々な保型形式の周期に対して regularized 周期を構成し、一般線形群のテンソル積L函数の積分表示の一般化、二次拡大E/Fに対して、 $GL(n, F)$ -distinguishedな $GL(n, E)$ の留数的保型表現を特徴付け、ユニタリ群やメタプレクティック群の直積群の生成的保型表現のGross-Prasad周期が消えないための必要条件を与えた。三重交代積L函数が極を持つ $GL(6)$ の尖点的保型表現を特徴付け、一般線形群の二重対称積L函数の積分表示の理論も整備し、その極を一般線形群の二重被覆群の例外表現に関する周期により特徴付けた。

研究成果の概要(英文)：I gave a necessary and sufficient condition for the nonvanishing of theta liftings. I constructed regularization of various period integrals of automorphic forms. Applications include a generalization of the theory of tensor product L-functions for general linear groups, a characterization of $GL(n, F)$ -distinguished residual automorphic representations of $GL(n, E)$, necessary conditions for non-vanishing of periods of Gross-Prasad type of generic automorphic representations on products of unitary groups or metaplectic groups.

Moreover, we characterize cuspidal automorphic representations of $GL(6)$ whose exterior cube L-functions have a pole and develop a theory of a Rankin-Selberg integral representation representing the symmetric square L-function for general linear groups and characterize its pole in terms of period integrals with respect to exceptional representations of the double cover of general linear groups.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型表現 L函数 周期 リフティング Eisenstein級数 テータリフト Gross-Prasad予想 regularization

1. 研究開始当初の背景

(1) リフトとは簡単にいえば、異なる群の保型表現の間の対応を記述する問題である。保型表現の別の群へのリフトが存在する条件や別の群からのリフトとして得られるための条件を見出すことは保型表現論の主要な問題である。現在までに知られているリフトは、その多くがテータ函数を核函数とする積分により構成されるテータリフトである。テータリフトの理論の大きな問題点は、テータリフトが存在するための有用な必要十分条件が知られていないことであり、筆者の研究目標はこの問題を解決することであった。

(2) 保型形式のその定義されている群の適当な代数的部分群上の積分は周期と呼ばれる。このような周期と L 函数の特殊値の関係式や周期が 0 でない保型形式が別の群からのリフトであるというような現象がいろいろな場合に確認されている。1990 年代前半、Gross と Prasad は L 函数の特殊値と周期に関する一連の予想を提出した。Gross-Prasad 予想は大雑把には、直交群の直積 $SO(n+1) \times SO(n)$ の保型 L 函数の中心特殊値が 0 でないことと周期が 0 にならないことが同値であるという予想である。

2. 研究の目的

本研究の主たる目的は、保型 L 函数と保型表現のリフトや周期の関係を解明することである。具体的には、保型表現のリフトが存在するための必要十分条件を保型 L 函数の特殊値が 0 でないというような大域的条件と保型表現の局所成分に関する局所的条件を使って与え、更には、保型 L 函数の特殊値と保型形式の周期の関係式を見出し、L 函数の特殊値や留数の数論的あるいは幾何的性質を明らかにすることを目指したい。

(1) 研究の方法

相対跡公式とはいわば、群の対やその対称空間への跡公式の一般化であり、Jacquet により研究が始められ、様々な相対跡公式が周期の研究に応用され、巨大な成果を挙げている。ユニタリ群の場合の市野-池田予想の類似が最近、Wei Zhang により相対跡公式を用いて幾つかの条件を仮定して証明されたことは各方面を驚かせた。しかし、Wei Zhang は保型表現に技術的制限を仮定して主要項だけを残した単純相対跡公式を使い、実素点での移送も解析していないので、彼の結果は応用上十分ではない。本研究では、相対跡公式の理論を発展させ、制限なしに市野-池田予想を証明することを目指した。それにより、市野-池田予想と内視論の関係を解明できるはずであった。

4. 研究成果

(1) 筆者や Wee Teck Gan らのこれまでの研究により古典群の保型表現の標準 L 函数の極や特殊値とテータリフトを結び付ける等式が一般的に証明された。これによりテータリフトが消えないための必要十分条件を、筆者は完全 L 函数の臨界点での解析的性質と各素点での局所テータ対応に関する局所的条件の二条件により与えられた。

(2) regularized 周期とは、跡公式で使われる保型形式の truncation を適当に修正して定義される混合 truncation を使って従来の保型形式の周期積分を収束しない場合にも拡張したものであり、Jacquet, Lapid, Rogawski らにより、ある種の対合に関する不変部分群の周期積分に対して構成された。彼らの構成を真似て、筆者と市野篤史氏は昨年度に、 $GL(n+1) \times GL(n)$ 上の保型形式の $GL(n)$ 周期や $U(n+1) \times U(n)$ 上の保型形式の $U(n)$ 周期の場合に regularized 周期を構成した。前者により Jacquet, Piatetski-Shapiro,

Shalika の一般線形群のテンソル積 L 関数の理論が一般の保型形式に対して一般化され、留数スペクトラムの $GL(n)$ 周期の消滅などの副産物も証明された。さらに後者を応用して、 $U(n+1) \times U(n)$ の生成的保型表現の $U(n)$ 周期が消えないためには、テンソル積 L 関数の中心特殊値が 0 でないことが必要であることを証明した。この結果は Gross-Prasad 予想の一部である。

(3) 対称対 (G, H) に対して、0 でない H 上の周期を持つ G の保型表現は H distinguished と呼ばれ、局所的には部分群 H の作用で不変な汎関数を持つ群 G の表現を H distinguished と呼び、L 関数や関手性との関係から近年注目を集めている。 (G, H) が Galois 対のとき、Jacquet, Lapid, Rogawski は G 上の保型形式の部分群 H 上の regularized 周期を構成した。筆者は昨年彼らの構成を拡張して、直積群 $G \times H$ 上の保型形式の対角部分群 H 上の周期や任意の簡約代数群の被覆群 G に対し、 $G \times G \times G$ 上の保型形式の対角部分群 G 上の周期の regularization を構成した。後者の型の周期を三重積型、前者の型の周期を捻り三重積型と、筆者は呼んでいる。三重積型や捻り三重積型の積分は多くの L 関数の積分表示に現れる。例えば $GL(n) \times GL(n)$ や $GL(n) \times Sp(n)$ のテンソル積 L 関数、浅井 L 関数、二次対称積 L 関数や $GL(6)$ の三次交代積 L 関数の積分表示は全てこれらの型である。筆者は単に regularized 周期の応用範囲を広げただけでなく、一般一意性原理と組み合わせることで非尖点的保型形式の周期を系統的に計算する技術を得た。この研究は生成的尖点的保型表現にしか適用できないと考えられていた積分表示の理論を非尖点的保型表現に応用したもので、興味深いものだと思う。応用として三重積型の特別な場合であるメタプレクティック群の

直積の Fourier-Jacobi 周期を計算して、それが消えていなければ、あるテンソル積 L 関数の中心特殊値が 0 でないことを証明した。これは Fourier-Jacobi 周期に関する GP 予想の類似である。別の応用として、二次拡大 K/F に対して、 $GL(n, K)$ の留数的保型表現の $GL(n, F)$ 上の周期を計算し、 $GL(n, F)$ distinguished な $GL(n, K)$ の留数的保型表現を分類した。

(4) $GL(6)$ の三次交代積 L 関数の極を $GL(3)$ からのリフトにより特徴付けた。この証明は $GL(6)$ の三次交代積 L 関数の Ginzburg-Rallis による構成と一般線形群の二次基底変換の理論を組み合わせたものである。

(5) Weizmann 研究所博士研究員の Kaplan 氏と $GL(n)$ の二次対称積 L 関数の留数とある種の周期積分を結び付けた。二次対称積 L 関数の理論は、その基本的重要性にも関わらず、Bump と Ginzburg による積分表示にギャップが見つかって以降、20 年以上に渡って修正されなかった。最近の武田修一郎氏の研究を経て、筆者らの研究によりその基礎が確立したことは大きな進展だと思う。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1. S. Yamana, On the Siegel-Weil formula for quaternionic unitary groups, American Journal of Mathematics 135 (2013) 1383-1432, 査読有.
2. S. Yamana, The Siegel-Weil formula for unitary groups, Pacific Journal of Mathematics 264 (2013) 235-257, 査読有.

3. S. Yamana, An explicit formula for Fourier coefficients of Eisenstein series attached to lattices, Ramanujan Journal of Mathematics 31 (2013) 315-352, 査読有.
4. S. Yamana, Symplectic periods of the continuous spectrum of $GL(2n)$, Annales de l'institute Fourier (掲載予定), 査読有.
5. S. Yamana, L-functions and theta correspondence for classical groups, Inventiones Mathematicae (掲載予定), 査読有.
6. S. Yamana, A. Ichino, Periods of automorphic forms: the case of $(GL(n+1) \times GL(n), GL(n))$, Compositio Mathematica (掲載予定), 査読有.

[学会発表](計 17 件)

1. Periods of automorphic forms on $(GL(n+1) \times GL(n), GL(n))$, 第 15 回整数論オータムワークショップ, 白馬ハイマウントホテル, 2012 年 10 月.
2. 保型形式の L 関数, 金沢大学談話会, 金沢大学, 2012 年 11 月.
3. 保型形式のリフトと周期と L 関数, 名古屋大学解析数論セミナー, 名古屋大学, 2012 年 11 月.
4. L-functions and theta correspondence, Number Theory Seminar, Morningside Center of Mathematics, 2012 年 12 月.
5. Periods of automorphic forms on $(GL(n+1) \times GL(n), GL(n))$, 精華大学整数論セミナー, 精華大学, 2012 年 12 月.
6. Periods of automorphic forms on $(U(n+1) \times U(n), U(n))$, RIMS 研究集会, 京都大学, 2013 年 1 月.
7. Periods of automorphic forms on $(GL(n+1) \times GL(n), GL(n))$, Seminaire Groupes Reductifs et Formes Automorphes, パリ 7 大学, 2013 年 2 月.
8. $Sp(2n)$ -distinguished representations of $GL(2n)$, Workshop on H-distinction and RLLC, 岡山大学 2013 年 3 月.
9. 四元数ユニタリ群のテータリフトと L 関数, 第 17 回早稲田大学整数論集会, 早稲田大学, 2013 年 3 月.
10. Periods of automorphic forms on $(GL(n+1) \times GL(n), GL(n))$, 九大整数論集会, 九州大学, 2013 年 4 月.
11. L-functions and theta correspondence, The Pacific Rim Mathematical Association Congress, 上海交通大学, 2013 年 6 月.
12. The Siegel-Weil formula for unitary groups over skew fields, 第 12 回広島仙台整数論研究集会, 広島大学, 2013 年 7 月.
13. L-functions and theta correspondence, The Pan Asian Number Theory Conference, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics, 2013 年 7 月.
14. Periods of automorphic forms on $(GL(n, E), GL(n, F))$, 第 8 回福岡数論研究集会, 九州大学, 2013 年 8 月.
15. L-functions and theta correspondence, コロンビア大学整数論セミナー, コロンビア大学 2013 年 9 月.
16. Residual spectrum of $GL(n, E)$ distinguished by $GL(n, F)$ for a quadratic extension E/F , ヘブライ大学 Kazhdan 数論セミナー, ヘブライ大学, 2014 年 1 月.
17. Residual distinguished spectrum of general linear groups, ベン・グリオン

大学保型形式セミナー, ベン・グリオン
大学, 2014 年 1 月.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山名 俊介 (Yamana shunsuke)
九州大学大学院数理学研究院 助教
研究者番号：50633301

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：