

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：17201

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840034

研究課題名(和文) Qファノ多様体の有理性とその周辺に関する明示的研究

研究課題名(英文) Explicit study of rationality of Q-Fano varieties and its related topics

研究代表者

岡田 拓三 (Okada, Takuzo)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：20547012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：85族からなる3次元Qファノ重み付き余次元2完全交叉の双有理的森ファイバー構造の決定を目標とした研究を行った。結果として、19族に属する一般メンバーが双有理剛性を有する事、および14族に属する各メンバーが双有理的森ファイバー構造を丁度2つ有する事を示した。このことから特に、 $33=19+14$ 族の一般メンバーが非有理的である事が従う。また、35族からなる3次元Qファノ重み付き超曲面を研究し、34族の一般メンバーの有理性を決定した。

研究成果の概要(英文)：We studied 85 families of Q-Fano 3-fold weighted complete intersections of codimension 2 with the aim to determine their birational Mori fiber structures. As a result, we proved that a general member belonging to 19 families is birationally rigid, and every (quasismooth) member belonging to 14 families has exactly two birational Mori fiber structures. This in particular implies nonrationality of general members belonging to $33 = 19 + 14$ families. We also studied 35 families of Q-Fano 3-fold weighted hypersurfaces and determines (non)rationality of generic members belonging to 34 families.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ファノ多様体 有理性 重み付き完全交叉 重み付き超曲面

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の有理性(判定)問題とは、与えられた代数多様体が有理的か否か、つまり、射影空間と双有理同値か否か、を判定する問題である。これは、「単有理多様体は有理的か」という Luroth 問題に端を発する。あるいは、代数多様体の双有理分類問題における最も基本的な問題の一つにも位置づけられる。2次元以下において Luroth 問題が肯定的に解決されている事は古典的事実である。また、2次元代数多様体に対する有理性判定問題は Castelnuovo による有理性判定法により簡明な解答が与えられている。3次元以上では、類似の判定法は期待できず、1970年代初頭には、単有理的である非有理的 Q ファノ多様体の例が提示され、Luroth 問題が否定的に解決された。

3次元極小モデルプログラムが森により最終的に解決されてから、3次元代数多様体の詳細な研究が進展しつつある。本研究課題に関わるものとして、3次元 Q ファノ多様体の重み付き射影空間への埋め込みとしての分類が進展している。それらは有限族からなることが理論的に知られているものの、実際には膨大な数の族からなる。比較的余次元が低いものについては、完全な分類がなされているため、それらの明示的研究は現実的である。

高次元における有理性問題にアプローチする手法はいくつか知られているが、そのうちの一つである、双有理剛性について説明する。双有理剛性の理論は Iskovskikh-Manin による非特異 3次元 4次超曲面の研究に起源を持ち、その後 Iskovskikh, Pukhlikov, Reid, Corti らにより発展されたものである。与えられた代数多様体の双有理同値類に属する森ファイバー空間のことを、その多様体の双有理的森ファイバー構造と呼ぶ。双有理的森ファイバー構造を唯一つしか持たないときに、その多様体は双有理剛性を有すると言う。代数多様体が双有理剛性を有すれば、非有理的である事が従う。Iskovskikh-Manin による研究以降、様々な Q ファノ多様体(および一般には森ファイバー空間)の双有理剛性が示されて来た。特に、Corti-Pukhlikov-Reid は 95族からなる Fano-Weil 指数が 1である(つまり反標準因子が Weil 因子類群の生成元であるもの)3次元 Q ファノ重み付き完全交叉の各族の一般メンバーが双有理剛性を有する事を示した。その後 Corti-Mella は特定の端末特異点を有する 3次元 4次超曲面が丁度二つの双有理的森ファイバー構造を持つ事を示した。代数多様体の非有理性を結論付けるには、双有理的森ファイバー構造が有限である事を示せば十分である。このことは、有理性問題を考察する際に、双有理剛性のみではなく、双有理森ファイバー構造の有限性に着目する事の重要性を示唆している。ところが、Corti-Mella により提示されたもの以外には、双有理剛性ではないものの双有理的

森ファイバー構造が有限であるような例が提示されていないという状況である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、明示的な解析を通して 3次元 Q ファノ多様体の有理性および有理性に関連する性質を調べる事にある。有理性に関連する性質とは、双有理剛性やそれに準じる性質、自己双有理写像群等を指す。具体的目標は次の通りである：

- 85族からなる 3次元 Q ファノ重み付き余次元 2 完全交叉の双有理的森ファイバー構造を決定し、それらの非有理性を示す。
- 3次元 Q ファノ重み付き超曲面のうち、Corti-Pukhlikov-Reid により双有理剛性を示されている 95族を除いた 35族の(非)有理性を決定する。

上記の明示的研究を通して、対象多様体の自己双有理写像群の研究や、双有理的森ファイバー構造の族における挙動なども観察したいと考えている。

3. 研究の方法

高次元代数多様体の有理性問題にアプローチする方法はいくつか知られているが、そのいずれも万能なものではないため、研究対象によって適切なものを選択する必要がある。

85族からなる Q ファノ余次元 2 完全交叉については、サルキソフプログラムに基づいた極大特異点の理論を応用した。極大特異点の理論とは、双有理剛性を示すための基本理論であり、Iskovskikh-Manin により提唱されてから様々に一般化・改良されている。サルキソフプログラムは、森ファイバー空間の間の双有理写像を記述するプログラムであり、双有理的森ファイバー構造の決定問題に直接的に関係する。

Q ファノ重み付き超曲面のうち 95族については、先行研究により双有理剛性が示されているので、それらの非有理性がわかっている。その他の 35族については、双有理的森ファイバー空間を決定することは相当な困難が予想される。従って、それらに対しては、主に Kollar 氏により導入された正標数還元手法を応用して有理性判定を行った。

代数幾何学の研究集会やセミナーに多数参加し、講演を行ったり、様々な研究者とディスカッションを行った。このことが、研究の進展に繋がったと考えている。

4. 研究成果

85族からなる 3次元 Q ファノ重み付き余次元 2 完全交叉を対象として研究した。各族の一般メンバーに対して、その極大特異サイクルを分類し、各極大特異サイクルに対して、そのサイクルを中心とするサルキソフ

リンクを構成した。結果として、85族のうち、19族に属するメンバーが双有理剛性を有する事、および残る66族に属するメンバーが双有理剛性を有しない事を示した。本結果は、3次元重み付き余次元2完全交叉の双有理的森ファイバー構造を決定する為の重要なステップである。この結果についてはプレプリントとして公表し、現在学術雑誌に投稿中である。

また、66族のうち14族に対してさらなる研究を進め、それらの各族に属するメンバーは双有理的森ファイバー構造を丁度二つ有する事を示した。本結果において特筆すべき点として、各族の一般メンバーのみだけでなく、全てのquasismoothなメンバーについてその双有理的森ファイバー構造を決定できた点が上げられる。本結果についてもプレプリントに纏め、現在学術雑誌に投稿中である。残る52=66-14族については双有理的森ファイバー構造を完全に決定するには至っていないが、多くの族について部分的結果が得られている事から、今後の研究の着実な進展が期待できると考えている。

上記の研究結果は、有理性、双有理的森ファイバー構造のみならず、代数多様体の重要な双有理不変量である自己双有理写像群の情報まで与える。議論の過程で、各極大特異サイクルを中心とするサルキソフリンクを明示的に構成したが、対象のQファノ多様体の自己双有理写像は、それら(有限個の)サルキソフリンクと自己同型の合成で表されるのである。また、特定の族の特殊なメンバーを考察し、双有理的森ファイバー構造を丁度3つ有するような例を構成する事に成功している。本結果については現在論文を執筆中である。

35族からなる3次元Qファノ重み付き超曲面の有理性についても研究を行った。35族のうち20族はほぼ自明に有理的であることがわかる。先行結果と本研究を通して、14族に対して非有理性を示す事に成功した。残る1つの族については非有理的であろうと推測しているが、未だに結論付けるに至っていない。正標数還元手法によるアプローチで非有理性を結論付けるのは困難であるため、その他のアプローチを検討する必要がある。今後の課題としたい。

論文は、代数多様体の安定性に関する専門家である尾高氏との共同研究によるものであり、双有理超剛性を有する(一般次元)ファノ多様体が、ごく弱い付加条件の下にスロープ安定である事を示した。ファノ多様体の双有理(超)剛性と安定性という全く出自の異なる概念の間に関係性を見出した点に価値があるように思う。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

Yuji Odaka, Takuzo Okada, Birational superrigidity and slope stability of Fano manifolds, *Mathematische Zeitschrift* vol. 275, Issue 3-4, 1109 – 1119 (2013), 査読有.
DOI:10.1007/s00209-013-1172-7

[学会発表](計8件)

岡田拓三, 重み付き完全交叉の有理性問題について, 特異点論月曜セミナー, 日本大学, 2013年2月19日.

岡田拓三, Rationality problem of 3-dimensional weighted complete intersections, 代数幾何学セミナー, 名古屋大学, 2013年4月17日.

岡田拓三, 3次元重み付き完全交叉の有理性問題について, 埼玉大学談話会, 埼玉大学, 2013年5月31日.

Takuzo Okada, Introduction to rationality problem of quartic (and cubic) 3-folds, Workshop in Algebraic Geometry in Sapporo, 北海道大学, 2013年8月28日.

Takuzo Okada, On birationally tririgid Q-Fano threefolds, 第12回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2013年9月5日.

岡田拓三, On birationally tririgid Q-Fano threefolds, 射影多様体の幾何とその周辺2013, 高知大学, 2013年11月4日.

岡田拓三, On birationally tririgid Q-Fano threefolds, 代数幾何学セミナー, 東京大学, 2013年12月9日.

岡田拓三, On birationally tririgid Q-Fano threefolds, Fano多様体の最近の進展, 京都大学数理解析研究所, 2013年12月16日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:

番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 拓三 (OKADA, Takuzo)
佐賀大学・工学系研究科・講師
研究者番号：20547012

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：