科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：２４８４００３５

研究課題名（和文）可積分系理論と特異トロピカル曲線の研究

研究課題名（英文）Integrable systems and singular tropical curves

研究代表者
岩尾　慎介（Iwao, Shinsuke）

青山学院大学・理工学部・助教

研究者番号：７０６３４９８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：トロピカル曲線の理論と超離散可積分系数学の関係に関して研究を行った。トロピカル曲線とは、区分的に線型な関数を用いて定義される幾何学的対象で、具体的には距離グラフとして実現される。一方、超離散可積分系とは、偏微分方程式に「超離散化」と呼ばれる特殊な極限操作を施して得られる、「区分的に線型な」微分方程式のことである。
本課題では、周期境界条件を課した種々の超離散可積分系に対して、トロピカル曲線を用いた初期値問題の解法を構成した。

研究成果の概要（英文）：I studied the relation between the tropical mathematics and the ultradiscrete integrable systems. Tropical curves are geometrical objects defined by the use of piece-wise linear functions, which are realized as metric graphs. On the other hand, ultradiscrete integrable systems are "piece-wise linear differential equations" obtained from various integrale systems through the "ultradiscretization", which is some special limiting procedure.
In this study, I constructed the method for the initial value problems of various periodic ultradiscrete integrable systems.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：トロピカル幾何　超離散可積分系

１．研究開始当初の背景

本研究の対象は、トロピカル曲線、および超離散可積分系である。
トロピカル曲線とは、区分的に線形な関数を用いて定義される幾何学的対象であり、実ユークリッド空間内の距離つき有限グラフとして実現される。21 世紀初頭より様々な研究者によって研究されており、有限種数のトロピカル曲線に対する Abel-Jacobi 理論、テータ関数の理論などは、既にある程度確立している。
一方、超離散系とは、偏微分方程式に「超離散化」と呼ばれる特殊な極限操作を施すことによって得られる「区分線形な偏微分方程式」のことであり、20 世紀末ごろから盛んに研究され始めた数学的対象である。
一般に超離散化という極限操作は、元の方程式の情報を大きく損なうものである。しかし超離散系に関する過去の研究の結果によれば、可積分系と呼ばれる非常に性質の良い偏微分方程式系に関しては、超離散化した後の方程式も元の方程式の情報を十分保持していることがある。可積分微分方程式を超離散化して得られる超離散系は「超離散可積分系」と呼ばれ、元の可積分微分方程式の本質的な情報を抽出した物と見ることができる。

本研究では特に、特異点を持ったトロピカル曲線（特異トロピカル曲線）を興味の対象とした。研究開始時点における特異トロピカル曲線の周辺の背景を、（１）トロピカル幾何学サイド、（２）可積分系サイドからそれぞれ見ると、おおむね以下の様であった。

（１）　先行研究として、「特異トロピカル曲線」に関するいくつかの考察はなされていたが、系統的な研究は現れていなかった。
トロピカル曲線の「特異性」の定義自体、著者によって変わるような曖昧なものしかなく、決定的なものは無かった。

（２）　研究代表者自身の先行研究により、古典可積分系の解を構成する方法 (Krichever construction) のトロピカル類似が得られていた。それは、個々の超離散可積分系を、(特異でない) トロピカル曲線を用いて解く手法であったが、その手法を特異トロピカル曲線に対しても拡張できると期待された。
ただし、「Krichever construction のトロピカル類似」は, 研究開始時点では周期境界条件を課した超離散 (1+1)次元戸田方程式（およびその拡張）の場合のみしかなされていなかった。 特異トロピカル曲線の理論のためには, もっとたくさんの超離散可積分系にも同様の手法が存在することを証明する必要があった。

２．研究の目的

本研究では、「可積分系の理論をトロピカル幾何に応用する」という発想のもと、これまで曖昧であった特異トロピカル曲線の理論を再構築し、その上の理論を研究することを目的とした。
具体的には以下を本研究の目的とした。

（１）　可積分系の理論（Krichever construction）と齟齬の無いような「特異トロピカル曲線」の概念を提出すること。

（２）　特異トロピカル曲線の理論を構築すること。特にトロピカルテータ関数の理論を考察すること。

３．研究の方法

本研究では、以下の 3 つの方針をもって、研究にあたった。

（１）　超離散可積分系の代表的な例である、周期境界条件を課した
- 超離散(2+1)次元戸田方程式、
- 超離散 KP 方程式、
- 超離散 KdV 方程式、
- 超離散mKdV 方程式、 etc.

に対して、トロピカル曲線を用いた初期値問題の解法を構成する。
この時点では、特異では無いトロピカル曲線を扱うことになると期待される。

（２）　離散可積分系に対して知られている、特異曲線を用いた可積分系の解法（ソリトン解の代数幾何学的構成）のトロピカル類似を構成する。
この過程において、特異曲線の「トロピカル版」と呼ぶべき幾何学的対象があらわれると期待される。

（３）　可積分系理論から推察される、「一般的な特異トロピカル曲線」の理論を構築する。
本研究で見出されるであろう「特異トロピカル曲線」の概念は、可積分系理論という背景をもつものであるから、純粋にトロピカル幾何学のみの立場から考察するよりも、より数学的正当性が高いものとなると期待できる。

４．研究成果

本研究における成果は以下の通り。

（１） 周期境界条件を課した(2+1)次元戸田方程式の超離散化を行い。その結果として、(2+1)次元の箱玉系を導出した。ここで得られた(2+1)次元の箱玉系は、2 次元の平面内を移動する「平面ソリトン波」の超離散類似と考えられる。実際、この系においては、平面ソリトン波の理論で知られているような
・平面波の衝突現象、
・平面波の共鳴現象、
が再現されている。
私は（本研究の趣旨とは逸れるが)、(2+1)次元箱玉系それ自体、興味深い数学的対象であると考えており、さらなる研究を行う予定である。

（２） 周期境界条件のもとで、超離散(2+1)次元箱玉系の初期値問題を解いた。系として、超離散 KdV 方程式、超離散 mKdV 方程式の初期値問題も解いたことになる。
これは、1 次元周期箱玉系（高橋-薩摩系）の解法を拡張することによって得られるものであった。超離散(2+1)次元箱玉系の解は、特異では無いトロピカル曲線に付随する「トロピカルテータ関数」を用いて書かれる。

（３） 半無限境界条件を課した離散 KdV 方程式の初期値問題を、Krichever construction を適用して解いた。
半無限境界条件に対しては、Krichever construction を適用するために必要な「スペクトル曲線」を初期値から具体的に構成する方法が知られていなかったが、無限行列の積の繰り込みを多項式環の代数拡大の理論を用いて実行することにより、スペクトル曲線の定義方程式を具体的に記述することに成功した。
このスペクトル曲線は、2 つの有理曲線の和集合となることがわかった。
特に、半無限境界条件の下では、スペクトル曲線は特異曲線となり、対応する「テータ関数」は，有限サイズの行列式になる。

（４） 擬周期境界条件（有限の範囲の例外を除いて周期的な状態）を課した離散 KdV 方程式に関しても、前項と同様の結果を得た。
この場合のスペクトル曲線は、有限種数の代数曲線と有理曲線の和集合となる。これは、やはり特異代数曲線である。対応する「テータ関数」は、有限種数の代数曲線に対応する「普通のテータ関数」を成分に持つ行列の行列式である。

（５） 上記（３）の超離散類似を考察した。
この方法で得られる特異代数曲線の「トロピカル版」は、3 次元空間内の距離グラフとして実現される。この特異トロピカル曲線は、以下の性質で特徴づけられる：
・ 有限種数のトロピカル曲線Γと、トロピカル直線Δの和集合となっている。
・ トロピカル直線Δは 3 次元空間の座標無限大の場所に位置する。
・ ΓとΔは有限個の交点を持つ。

このトロピカル曲線に対応する「テータ関数」は、超離散 Paffian である。

（６） 超離散可積分系に関して得られた知見をもとに、特異トロピカル曲線の理論の構築を目指した。いくつかの具体的な 3 次元空間内の特異トロピカル曲線に対して、超離散テータ関数の概念を定義することができたが、一般的な理論という観点からみれば、まだ限定的な概念であり、今後の研究が期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Shinsuke Iwao, Hidetomo Nagai and Shin Isojima,
Tropical Krichever construction for the non-periodic box and ball system,
Journal of Physics; Mathematical and Theoretical, 査読有, 45 巻, 2012, 395202
DOI: 10.1088/1751-8113/45/39/395202

② Shinsuke Iwao,
The two-dimensional periodic box-ball system and its fundamental cycle,
Journal of Physics: Mathematical and Theoretical, 査読有, 45 巻, 2012, 395204
DOI: 10.1088/1751-8113/45/39/395204

③ 岩尾慎介、
離散 mKdV 方程式の 2 重 Casorati 行列式解と特異曲線,

RIMS 講究録別冊，査読有，B30 巻，2012，pp.101--118

〔学会発表〕(計１件)

① Shinsuke Iwao,
Tropical geometry and integrable systems,
JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013, Discrete Mathematics & its Applications，招待講演,
Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo,
2013 年 11 月 08 日

６．研究組織

(1)研究代表者

岩尾　慎介（IWAO, Shinsuke）
青山学院大学･理工学部物理･数理学科･助教
研究者番号：70634989