

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840041

研究課題名(和文) ルート系のゼータ関数の値に関する解析的性質の研究

研究課題名(英文) Research on the analytic property related with the zeta-values of the root system

研究代表者

岡本 卓也 (Okamoto, Takuya)

立命館大学・理工学部・講師

研究者番号：70633197

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円、(間接経費) 300,000円

研究成果の概要(和文)：多重ゼータ関数の値に関する解析的性質についての研究を行った。特に、数理物理との関連が深いルート系のゼータ関数に関連する一般化されたMordell-Tornheim型の2重ゼータ関数に対して、その正の整数点での値の関係式と2乗平均の考察を行った。正の整数点での値についての研究ではParity resultと呼ばれる結果の簡潔な明示公式を与えた。また、2重平均に関してはEuler-Zagier型の2重ゼータ関数の2乗平均の結果を含む結果を与えた。

研究成果の概要(英文)：I researched on the analytic property related with the multiple zeta-values. In particular, for generalized Mordell-Tornheim double zeta-function associated with mathematical physics is related to the zeta-function of the root system, I studied about their double and triple zeta values at positive integers and also its mean value theorems.

For the result on the zeta values at positive integers, I gave brief explicit formulas of the result on the Parity result. Further, I gave mean value theorems which are generalization of the mean value theorems for the Euler-Zagier double zeta-function.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：多重ゼータ関数 平均値 ベルヌーイ多項式 parity result

1. 研究開始当初の背景

ルート系のゼータ関数は一種の多重ゼータ関数であり、それは向き付け可能な閉2次元曲面上の半単純連結コンパクトリー群Gによる量子ゲージ理論の分配関数の定数部分の拡張である。また、ルート系のゼータ関数の正の整数点での値は閉2次元曲面上の主G束の平坦接続全体の体積に関係することも知られている。そのため、それに関連する多重ゼータ関数の値や解析的性質の研究は重要となる。

2. 研究の目的

一種の多重ゼータ関数であるルート系のゼータ関数は向き付け可能な閉2次元曲面上の半単純連結コンパクトリー群Gによる量子ゲージ理論の分配関数の定数部分の拡張であり、その値は物理系との関わりが深い。そのため、ルート系のゼータ関数の正の整数点での値についての研究は様々な数学者により、盛んに行われている。本研究の目的は、一般化されたMordell-Tornheim型の2重ゼータ関数の値に関する性質を解析的手法を用いて明らかにすることで、ルート系のゼータ関数の値に関する性質を解明することである。特に、ここではその正の整数点での値の関係式とその平均値についての考察を行った。

3. 研究の方法

本研究ではルート系のゼータ関数に関して正の整数点での関係式と2k重平均の考察を行った。

(1) 正の整数点での関係式について

G₂型のルート系のゼータ関数に関連する2重ゼータ関数とL-関数の正の整数点での値の関係を一般化されたベルヌーイ多項式の関係式を用いることで考察した。さらに、詳しく述べると、2重ゼータ関数の正の整数点での値を一般化されたベルヌーイ多項式に帰着するために、その関数の値を積分で表示する必要があり、こ

の研究では、その表示と一般化されたベルヌーイ多項式の関係式が重要な役割を果たした。

(2) 2k重平均について

A₂型のルート系のゼータ関数を一変数と見なし、古典的(リーマンゼータ関数の研究)に使われている方法やEuler-Zagier型2重ゼータ関数の平均値定理で用いられた方法を基に考察を行った。しかしながら、このように今まで知られている方法だけではこの研究の考察には不十分で、そのために、和の評価式を新しく導入して、それを上手く用いることにより考察を行った。また、それ以外にも和の分離をする必要があり、そこに対しては部分積分やMellin-Barns積分を上手く用いることで解決した。

4. 研究成果

(1) 正の整数点での関係式について

G₂型のゼータ関数に関する部分Mordell-Tonheim型2重ゼータ関数の正の整数点での値をリーマンゼータ関数を用いて表した明示公式を与えた。

この結果は特にParity resultと呼ばれる結果であり、一般の多重ゼータ関数はParity resultを持つと考えられている。しかし、多重ゼータ関数の和に制限を与えた多重ゼータ関数については簡潔な明示公式は少ない。今回の結果はこのような和に制限を加えた2重ゼータ関数のParity resultの簡潔な明示公式を与えた結果で意義がある。

しかしながら、さらに一般の和に制限を加えた2重ゼータ関数に対しては簡潔な明示公式を与えるには至らなかった。これについては今後の課題である。

(2) 2k重平均について

A₂型のルート系のゼータ関数を一変数と見なし、そのゼータ関数の2乗平均の考察を行った。Euler-Zagier型2重ゼータ関数に関してこのような研究の結果はあるが、今回のような物理系との関わりの深いA₂型のルート系のゼータ関数の2乗平均値の結果はこれまでにはない。また、この結果は古典的に知られているリンデレーフ予想のA₂型のルート系のゼータ関数に対する類似が成り立つかもしれない領域を与えてもいる。

この結果はこの研究についてはすでに学術論文としてまとめ、The Ramanujan Journalへの掲載も決定している。

さらに、今後に対しては2重平均だけではなく2k乗平均の考察や、今回考えた領域以外に対しても2乗平均値定理が与えることができるかなどの課題もある。また、リンデレーフ予想の類似に関連しては多重ゼータ関数ではリンデレーフ予想の類似が成り立たないことがあり、このA₂型のルート系のゼータ関数に対しても、どのようなときはリンデレーフ予想の類似が成り立たないかを考えるという課題も残っている。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1件)

1 著書名:T. Okamoto、

論文標題:On alternating analogues of the Mordell-Tornheim triple zeta values、雑誌名:J. Ramanujan Math. Soc.、査読:有、巻:28、発行年:2013、ページ:247-269

[学会発表](計 4件)

1 発表者名:岡本 卓也、発表標題:Mean values of Mordell-Tornheim double

zeta-functions、学会名等:RIMS研究集会 解析的整数論-超越関数の数論的性質とその応用、発表年月日:2013年11月06日、発表場所:京都大学(京都府)

2 発表者名:岡本 卓也、発表標題:Parity result on the partial Mordell-Tornheim double zeta-function、学会名等:Joint workshop on pure and applied mathematics、発表年月日:2013年11月02日、発表場所:東北大学(宮城県)

3 発表者名:岡本 卓也、発表標題:Mordell-Tornheim型2重ゼータ関数の2乗平均、学会名等:立命館大学代数セミナー、発表年月日:2012年12月15日、発表場所:立命館大学(滋賀県)

4 発表者名:岡本 卓也、発表標題:Parity result on the partial Mordell-Tornheim double zeta-function、学会名等:RIMS研究集会「近似と漸近的手法を通して見た数論」、発表年月日:2012年10月31日、発表場所:京都大学(京都府)

[図書](計 0件)

[産業財産権]
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等
なし。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡本 卓也 (Okamoto Takuya)

立命館大学・理工学部・講師

研究者番号：70633197

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：