

機関番号：15401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840043

研究課題名(和文) 完全非線形偏微分方程式系の漸近問題に関する解析

研究課題名(英文) Asymptotic analysis on solutions to weakly coupled systems for fully nonlinear equations

研究代表者

三竹 大寿 (Mitake, Hiroyoshi)

広島大学・サステナブル・ディベロップメント実践研究センター・特任講師

研究者番号：90631979

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：完全非線形偏微分方程式に属するハミルトン・ヤコビ方程式を中心に、解の構造を深く理解することで、その漸近挙動(均質化問題、長時間挙動)を調べた。特に、同方程式の弱結合系の解を最適制御の観点から見直し、その詳細を解析することで、長時間挙動と均質化問題について解明することに成功した。また、長時間挙動に関する研究で、非線形随伴法を利用した解析手法を考案した。このことで、退化しうる拡散項を持ったハミルトン・ヤコビ方程式を取り扱うことが可能となった。

研究成果の概要(英文)：The main purpose is to deeply understand the structure of solutions to the weakly coupled system of fully nonlinear equations. More precisely, I mainly focused on some asymptotic problems (homogenization and large-time behavior), and got new results as follows. 1. Homogenization of the weakly coupled system of Hamilton-Jacobi equation with fast switching rates, analysis on the initial layer and the effective Hamiltonian. 2. Large-time behavior of the same system by analyzing the value functions of the optimal control problems which appear in the dynamic programming for the system whose states are governed by random changes. 3. Large-time asymptotics for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations by using the nonlinear adjoint method, which was completely new and giving a breakthrough on the study of the large-time asymptotics for degenerate parabolic equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：ハミルトン・ヤコビ方程式 弱結合型連立方程式 長時間挙動 均質化問題 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式 非線形随伴法

1. 研究開始当初の背景

最適制御、微分ゲーム、結晶成長を記述する重要な基礎方程式としてハミルトン・ヤコビ方程式がある。この方程式は完全非線形偏微分方程式に分類される。近年、弱 KAM 理論の進展に伴い、解の長時間後の挙動（長時間挙動）に関する解析が進展した。定常問題の解の多重性から、解の収束を示すために精巧な解析が要求される。これらの結果は、1 階ハミルトン・ヤコビ方程式と粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の単独方程式に関する結果が主であり、連立方程式系や、退化しうる拡散項を含む問題に関する結果がなかった。その理由は同方程式の連立系と退化放物型方程式の長時間挙動を数学的に捉える手法が十分発達していないためであった。また、結晶成長を記述する方程式に対して、これらの結果が応用できることが期待できたが、実例がなかった。

2. 研究の目的

ハミルトン・ヤコビ方程式を代表とする、完全非線形偏微分方程式に関して、その漸近挙動（均質化問題、長時間挙動）を解析する手法を開発する。これらを整備することで、たとえば結晶成長を記述する方程式など、物理的、工学的に意味のある非線形偏微分方程式の解の形状変化を解明するための数学解析の基礎を築く。

(1) 同方程式の弱結合連立方程式系に関して、解の構造を多角的に理解する。その重要な過程として、最適制御の観点から解の公式を見なおす。このことは、単独方程式に対しては、研究当初からよく知られた結果であったが、弱結合連立方程式系に対しては、ほとんど知られていなかったため、この解明を目指す。次に、この結果を使い出せるだけ多くの漸近問題に関する解明例を出すことを目指す。

(2) 1 階ハミルトン・ヤコビ方程式と粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に関する長時間挙動に対する結果を繋ぐ研究を目指す。退化放物型方程式に分類される退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式という一つの方程式の枠組みを構築する。上に挙げた二つの方程式は、解の性質が本質的に違うことから、特に解の深い性質となると、その二つを繋ぐ研究は難しい。長時間挙動の解析という観点から、このことに挑戦する。

(3) W.K. Burton 教授, N. Cabrera 教授, F.C. Frank 教授 (1951 年) により提唱された結晶成長のモデルを動機とした方程式を解析し、非常に薄いファセット成長に起こる不安定性に対して、数学的な裏付けとなる説明を与えることを目指す。この際に現れる方程式は、非強圧的なハミルトン・ヤコビ方程式である。この非強圧的であることは特徴的である。強圧的な場合と比べ包括的な研究は難

しく個々の方程式の特徴を考慮した技術を要求される。現象的にも、全く異なる挙動を見せる。このことを動機として、より一般の非強圧的なハミルトン・ヤコビ方程式に対して、その解の長時間挙動について考察し、その結果として結晶成長の理解を深める。

3. 研究の方法

(1) ハミルトン・ヤコビ方程式の弱結合連立方程式系については、まず最適制御の観点から解の公式を与える。その後、各々の漸近問題に取り組む。この問題については、研究代表者が海外共同研究者の Hung V. Tran 博士（シカゴ大学）と共同で取り組む。そのため、シカゴ大学への訪問、また、同氏を日本へ招聘するという協力を求める。

(2) 上に述べた、退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動を解析する手法として、非線形随伴法が突破口となる可能性がある。と睨んでいた。この手法に詳しい Tran 博士と Diogo A. Gomes 教授（アブデュラ王立工科大学）を訪問し、共同研究という形で研究協力を求める。

(3) 界面運動の多角的な研究の世界的権威の儀我美一教授（東京大学）、Qing Liu 博士（ピッツバーグ大学）と共同に取り組む。そのため、東京大学、ピッツバーグ大学へ訪問して議論をする。

上に挙げた共同研究者訪問以外にも、国内・海外における本研究分野の進展の情報を収集するために、様々な研究集会に参加する。

4. 研究成果

(1) ハミルトン・ヤコビ方程式の弱結合連立方程式系に関して、解の構造を多角的に理解するため、最適制御の観点から解の公式を見なおす試みをした。その結果、複数のラグランジュ関数を考え、確率的要素から決まる切替を考慮した変分問題又は最適制御問題から、解の公式を表現できることを解明した。このことは、ジャンプ型伊藤の公式を使う事で、形式的に分かり、動的計画原理が成立つ事を利用して、粘性解の意味で厳密に正当化できる。この確率的要素から決まる切替は非常にシンプルなことから、決定論的な常微分方程式で記述できる。

この事を、均質化問題の研究に活用し、単独方程式には見られないシステム特有の現象（初期層の発生、有効的ハミルトニアン（性質）の発見に至った。長時間挙動の研究では、この公式を駆使することで、精巧な解析を要求される収束部分を示すことに成功した。

今後、弱結合系に対する弱 KAM 理論, エルゴード問題の解の力学的構造理解への発展が期待できる.

(2) 近年, 1 階ハミルトン・ヤコビ方程式と粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動はそれぞれ盛んに研究されてきた. それぞれの初期値問題の解は, 時間が十分経った時に進行波解に一様収束する事が分かっている. 定常問題 (エルゴード問題) の解の一意性に関する決定的な違いから, その方法論は全く異なるものであった. そこで, これらを統一的に研究する新しい方法論の確立を目指した. その結果, (線形的)退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動について解明する事に成功した.

この解析には, 2010 年に Evans 教授 (カリフォルニア大学バークレー校) が導入した非線形随伴法を利用した. この方法論を使った, 長時間挙動の解析は大変斬新である. 次の二つの視点が特に新しい. 非線形随伴法を利用した解のエネルギー保存則に注目し, ハミルトニアン項, 拡散項の時間平均に対する評価を与えた. 初期値問題の解に関する一階微分, 二階微分を評価するために, エルゴード問題の近似方程式の解を利用した.

具体的には, 初期値問題の解と定常問題の近似方程式の解の一階微分, 二階微分の差に関する評価に注目した. 一般に, 退化放物型方程式を考えているため, 粘性消滅法において, 特に二階微分の良い評価を得ることは極めて難しい. このことを, 非線形随伴法とエルゴード問題の近似方程式の解を利用することで可能にした.

今後, ここで考えられた方法論とそこに現れる評価から, 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の深い定性的性質 (解の正則性, 定常問題の解の公式) を得られる事が期待できる. その方法論は堅固であり, 非線形拡散問題, 境界値問題, 平均場ゲーム理論, スカラー保存則方程式への応用も考えられる.

(3) 結晶成長のモデルを動機とした非強圧的ハミルトン・ヤコビ方程式の解が, ある領域では時間が経つにつれ, ある一定の速さを持って安定状態に近づくことが分かった. ここでは, その安定状態にある領域を有効領域と呼ぶ. 一方で, その外部では, 有効領域よりも速い速度で解が変化する. このような有効領域が現れる現象は, 強圧的なハミルトニアンを持つハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動を考えた時には現れないため, 非強圧的ハミルトン・ヤコビ方程式を持つ特有の性質の一つと言える. 有効領域とそこでの安定状態に近づく速さが, 与えられたハミルトニアンからどのように決まるかについても解明した. 更に, 有効領域での安定状態についても明らかとなった.

これらの結果は, 動機となった結晶成長の観察結果にも対応する. また, 有効領域での

定常状態を考えた時に, 自然にノイマン型特異境界値問題が現れる. この問題に対する, 解の存在と比較定理を与えた. この解の境界値での特異性は, 結晶のファセット成長に起こる不安定性に対応する. これにより, 表面過飽和度や運動エネルギーの異方性がどのように結晶成長の不安定性に影響を与えるかについて解明する 1 つの結果を与えた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

1. Y. Giga, Q. Liu, H. Mitake: Large-time asymptotics for Hamilton-Jacobi equations with noncoercive Hamiltonians appearing in crystal growth, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有, 印刷中.
2. F. Cagnetti, D. A. Gomes, H. Mitake, H. V. Tran, A new method for large time behavior of degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians, to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 査読有, 印刷中.
3. H. Mitake, H. V. Tran: Homogenization of weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations with fast switching rates, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 査読有, 211 (2014), no. 3, pp. 733-769. DOI: 10.1007/s00205-013-0685-x
4. H. Mitake, H. V. Tran: A dynamical approach to the large-time behavior of solutions to weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations, *J. Math. Pures Appl.* 査読有, (9) 101 (2014), no. 1, pp. 76-93. <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2013.05.004>
5. Y. Giga, Q. Liu, H. Mitake: Singular Neumann problems and large-time behavior of solutions of non-coercive Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366 (2014), no. 4, pp. 1905-1941. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05905-3>
6. G. Barles, H. Ishii, H. Mitake: A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Bull. Math. Sci.* 査読有, 3 (2013), no. 3, pp. 363-388. DOI: 10.1007/s13373-013-0036-0
7. H. Mitake, H. V. Tran: Remarks on the large time behavior of viscosity solutions of quasi-monotone weakly

- coupled systems of Hamilton-Jacobi equations, *Asymptot. Anal.*, 査読有, Vol. 77, pp. 43-70, (2012). DOI: 10.3233/ASY-2011-1071
8. G. Barles, H. Ishii, **H. Mitake**: On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 査読有, Vol. 204, pp. 515-558, (2012). DOI: 10.1007/s00205-011-0484-1
 9. Y. Giga, Q. Liu, **H. Mitake**: Large-time asymptotics for one-dimensional Dirichlet problems for Hamilton-Jacobi equations with non-coercive Hamiltonians, *J. Differential Equations*, 査読有, Vol. 252, pp. 1263-1282, (2012). DOI: 10.1016/j.jde.2011.10.010
 10. G. Barles, **H. Mitake**: A PDE approach to large-time asymptotics for boundary-value problems for nonconvex Hamilton-Jacobi equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 査読有, Vol. 37, pp. 136-168, (2012). DOI: 10.1080/03605302.2011.553645
 11. G. Barles, O. Ley, **H. Mitake**: Short time uniqueness results for solutions of nonlocal and non-monotone geometric equations, *Math. Ann.* 査読有, Vol. 352, pp. 409-451, (2012). DOI: 10.1007/s00208-011-0648-1

[学会発表](計15件)

1. **Hiroyoshi Mitake**, Weakly coupled systems of the infinity Laplace equations, AMCS seminar in KAUST, 10 March 2014, Saudi Arabia.
2. **三竹 大寿**, Large time behavior for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations by the nonlinear adjoint method, 第31回九州における偏微分方程式研究集会 2014年1月29日、福岡.
3. **Hiroyoshi Mitake**, Large-time asymptotics for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations, Colloquium, 10 Oct 2013, Kansas, U.S.A.
4. **Hiroyoshi Mitake**, H. V. Tran, Homogenization of weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations with fast switching rates, AMS conference, 6 Oct 2013, Louisville, U.S.A.
5. **三竹 大寿**, A dynamical approach to the large time asymptotics for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations, Computational, Applied Mathematics and PDE seminar, 6

Mar 2013, Chicago, U.S.A.

6. **三竹 大寿**, A new method for large-time asymptotics for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations by the nonlinear adjoint technique, Fukae workshop on PDE (2013), 2013年1月25日, 神戸.

6. 研究組織

(1)研究代表者

三竹 大寿 (MITAKE HIROYOSHI)
 広島大学・サステナブル・ディベロップメント実践研究センター・特任講師
 研究者番号：90631979