平成25年度（基盤研究（S））研究概要（採択時）

【基盤研究（S）】

理工系（数物系科学）

研究課題名　**数理モデルにおける非線型消散・分散構造の臨界性の未開領域解明**

東北大学・大学院理学研究科・教授　**小川**（おがわ）　**卓克**（たかよし）

研　究　分　野：　実解析学、調和解析学、偏微分方程式論

キ　ー　ワ　ー　ド：　非線型偏微分方程式、臨界型函数不等式、臨界函数空間

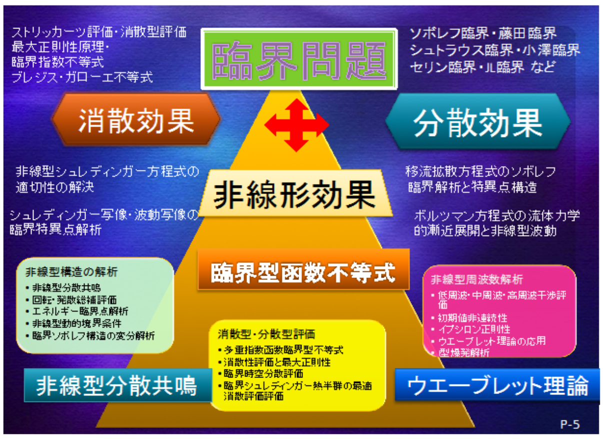
【研究の背景・目的】

多くの数理モデルは物理量の相互作用による非線型偏微分方程式で記述され、偏微分作用素による「線形構造」と、物理量の干渉に起因する 「非線型構造」を含む。線形構造は消散構造（散逸構造）や分散構造に基づき、系の安定化に寄与し、物理量の干渉による非線型構造は系を非安定化に導く。これら「線型・安定」構造と「非線型・不安定」構造がつり合う問題を「臨界問題」と呼び本研究の中心的対象となる。数学的にも応用上も重要な多くの問題で、こうした臨界状況が発生し、興味深い数学的現象が現れる。また臨界状況では解析学的に主要な技法である「摂動法」がそのままでは通用しないため解析学的な研究はより困難となる。本研究はこうした臨界性にまつわる問題を研究し、その背後に残されている未開領域ともいえる優臨界問題への足がかりを築くことにある。

【研究の方法】

臨界問題の多くは背景にある数理モデルから自然に導かれる質量保存則、運動量保存則、エネルギー、エントロピー保存則、ガリレイ変換普遍性などに加えて、数学的な等角・擬等角保存則といった構造を伴い、それらの無限次元空間内での挙動を詳しく知ることが問題の解決に大いに寄与する。そして無限次元空間内での汎函数の幾何学的状況を把握し、拮抗する状況がどのような構造により引き起こされるかを研究する。さらに、汎用函数不等式をより精密化した、いわゆる臨界型函数不等式を研究することは、臨界問題に非常に有効である。そのため函数解析学による函数空間の理解と同時に、不等式の精密化に寄与する実解析学・フーリエ解析の緻密な議論（実補間理論・ウェーブレット理論）を援用し、様々な臨界型函数不等式を確立することがこうした問題を取り扱う上で最も効果的である。

本研究では、とりわけ臨界型ソボレフ不等式、対数関数を制御するグロスの不等式、ブレジス–ガローエの不等式、および、その双対版と考えられるトゥルディンガー・モーザー型不等式の精密な研究を行う。そして自然な発展として、定数係数の線形偏微分方程式に対する消散–分散型評価（Lp-Lq 型評価あるいはストリッカーツ・ブレンナー評価）をオルリッツ空間を用いて精密化する。



【期待される成果と意義】

様々な臨界問題の背後にはミレニアム問題として著名な問題を始めとして、重要な未解決問題が軒を連ねる。とりわけ重要な課題として分散性と消散性が同時に存在するモデルにおける解析で、従来、分散性と消散性の解析が互いに相殺し、数学的な証明が困難に陥って、一方の構造をもつ場合に及ぶ成果が得られなかったが、本研究により様々な問題における消散分散構造の分離と非線形干渉による効果の分類が明らかになるにつれて、こうした困難さが解決されるものと考えられる。また臨界函数不等式の確立に伴い、消散・分散効果を伴った様々な解析学的評価群（双線形・三重線型評価、 線型消散型評価・線型分散型評価・最大正則性原理）を確立し手法を磨き上げる。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- 小薗　英雄・小川　卓克　・三沢　正史　共編著「これからの非線型偏微分方程式」日本評論社 300pp, 2007 年.
- 小川　卓克　著　「非線型発展方程式の実解析的方法」シュプリンガー現代数学シリーズ　丸善出版 430pp, 2013 年.

【研究期間と研究経費】

平成 25 年度～29 年度

132,700 千円

【ホームページ等】

http://www.tohoku.ac.jp/~ogawa.html