様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 5 月 29 日現在

機関番号：１２６０８

研究種目：基盤研究(A)（一般）

研究期間：2013～2017

課題番号：２５２４７００８

研究課題名（和文）動的幾何問題の変分解析

研究課題名（英文）Variational analysis on dynamic geometric problems

研究代表者

利根川　吉廣（TONEGAWA, Yoshihiro）

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：８０２９６７４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　31,600,000円

研究成果の概要（和文）：幾何学的測度論の枠組みで考える平均曲率流である、Brakkeの平均曲率流に関して基本的な存在定理と正則性定理を証明した。存在定理としては、n+1次元ユークリッド空間の中で任意のn次元閉集合を与えたとき、それを初期データとして時間発展するBrakkeの平均曲率流の時間大域存在を証明した。特異点集合解析については、1次元の場合の3重点周りの正則性理論を証明し、3重点が強い安定性をもつことを測度論的な立場から確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
幾何学的な熱方程式とも言える平均曲率流は、幾何学的時間発展問題の中で最も重要な問題の一つであり、その解の存在や正則性は数学的に興味深い研究課題となっている。示された存在定理は、1次元の場合の時間局所解でさえ知られていなかったものであり、一般次元で時間大域解の存在を示した画期的な結果となっている。特異点集合解析についても、幾何学的測度論の枠組みで動く特異点の正則性が証明されたのは初めてである。

研究成果の概要（英文）：We proved the basic existence and regularity theorems for the mean curvature flow considered in the framework of geometric measure theory which is called Brakke's mean curvature flow. As for the existence theorem, when given an arbitrary n-dimensional closed set in an n+1-dimensional Euclidean space, we proved the time global existence of the Brakke's mean curvature flow that evolves from the given initial data. For the analysis of the singular set, we proved the regularity theory around triple junction in the one-dimensional case, and showed the strong stability property of the triple junction within the weak topology of measure.

研究分野：変分解析、幾何学的測度論

キーワード：平均曲率流　変分問題　極小曲面　幾何学的測度論　特異点　正則性

１．研究開始当初の背景

変分法において主として最小化問題を対象とする直接法は、微分幾何学や偏微分方程式論の交差する幾何解析学において広く用いられ、多くの深い研究結果をもたらしてきた。具体的な研究対象は例えば極小部分多様体、調和写像、Kähler-Einstein 計量、Yang-Mills 場などであるが、これら問題の解の存在、解の正則性や大域的性質について、20 世紀後半から現在まで様々な結果が得られている。重要な点は問題に応じた非線形構造を深く理解することであるが、詳細な解析を可能にした要素として測度論的な手法、特に幾何学的測度論が果たした役割は大きい。これは特に極小部分多様体については明らかであるが、その他の変分問題においても類似の手法を持ち込むことによって多くの知見が得られており、近年でも着実な進展を見せている手法の一つである。
一方、変分法の枠組みにおいて、直接法にあてはまらない状況を考える問題、特に時間発展する幾何解析学の問題に近年多くの研究者が参入している。具体的な研究対象は例えば平均曲率流、調和写像流、Ricci 流、Willmore 曲率流などである。Ricci 流は Poincaré 予想解決において決定的な役割を果たしたが、その性質上、弱い解の概念は無いため測度論的手法の果たす役割は大きいとはいえない。それとは異なり、極小部分多様体を定常解としてもつ平均曲率流については Brakke による幾何学的測度論の枠組みでの弱い解の概念がある。Brakke の解は３重点などの特異点を持つ結晶粒界の時間発展をも含む概念であり、特に表面張力効果が大きいミクロからナノスケールにおける界面ダイナミクスとの関連が顕著な問題でもある。Brakke の平均曲率流はその潜在的重要性にも関わらず、幾何学的測度論の中でもさらに難解な理論であったため、特に正則性理論については Brakke の 70 年代の仕事以降ほとんど本質的な進展がなかった。私はこの点を 90 年代半ば以来の懸案としていたが、界面ダイナミクスを記述するフェイズフィールド法の研究を端緒として、Brakke の正則性定理の新証明と、その一般化を得ることに近年成功している。　これらは、極小部分多様体に対する最も基本的なε正則性定理である Allard の定理の、平均曲率流版と見なせる結果であり、測度論的なアプローチをするための基礎理論となるものである。国内外の研究進展状況としては、平均曲率流に関しては主として微分幾何学的アプローチの研究が数多くあるが、測度論的なアプローチに関しての研究はあまり他にはない状況であった。

２．研究の目的

研究目的は、時間発展する界面や場の変数を含む具体的な問題に取り組むことにより、主として測度論的な手法を用いた時間発展型変分問題の研究を推進する事である。問題の非線形性および幾何学的要請より、解は一般に特異点をもつのであるが、そのような状況において弱い解の存在、その部分正則性、および特異点集合自体の正則性の理論構築を目指す。具体的には以下の２つの方向性を持つ問題を重点的に研究することにより、様々な関連する変分問題に対して深い知見を得ることを目的とする。
（１）Brakke の平均曲率流
① 存在定理
Brakke 自身が示した存在定理については、解が非自明であるかどうかの保障が無いことが課題である。その後別方法で非自明時間大域解の存在が示されたが、領域の境界として界面が捉えられない問題では、非自明性を保証する存在定理は無い。そのため新たな近似手法により、非自明解の存在を示す。また 3 重点が衝突する解など、具体的な解の構成を行い、詳細な特異点解析を進める。
② 特異点集合解析
正則性理論は、ほとんどすべての時刻と点における正則性を示したものであり、特異点集合が「閉かつ測度が０である」ということ以外、本質的には何も知られていない。目指す定理は Simon による極小部分多様体の特異点集合解析の、時間発展版への拡張であり、Simon の理論を時間発展問題ならではの視点で俯瞰することを狙う。
③ 境界正則性
測度論的なアプローチの下、平均曲率流の境界正則性理論の構築を行う。主要かつ自然な幾つかの境界条件が考えられるが、それに対応する存在定理が無ければ自然な仮定設定もできないため、この問題は存在定理の考察とも密接に関わるものである。
（２）界面表面張力と相互作用する場の問題
２つの異なる液相（例えば高分子溶液など）が空間的に共存しており、各相は Navier-Stokes 方程式を満たす流体とする。２相を隔てる界面は表面張力を持つとして、時間的に動くとすると、このシステムは流体移流効果と表面張力効果の相互作用を伴う非線形問題となる。２相流体の問題以外でも、相分離を伴う電磁場および高分子秩序場等の相互作用問題も視野に入れた研究を展開することを目的とする。

３．研究の方法

Brakke の平均曲率流と２相流体問題について、研究分担者と研究協力者と連絡を取りつつ、多

くの国内外の研究集会で発表と意見交換することによって様々なフィードバックを得ることに注力する。非線形問題についての若手研究者向けサマースクールでミニコースを担当する（実績としてフーリエ研究所（2015年)、UCバークレー（2017年)、トリエステ国際理論物理学センター（2018年）で行った)。若手のポスドクを１名雇用し、研究に従事させる。2013年度に準備的な研究集会を一回、および2015年度と2017年度には国内外の幾何解析学の研究者を集めて２－3日間の研究集会を行う。

４．研究成果

（１）Brakkeの平均曲率流

① 存在定理

任意に与えられた閉集合を初期データにもつ平均琴曲率流の時間大域解は存在するか、という基本的な存在問題に対する､ひとつの答えを得ることに成功した(論文３)｡より正確に言えば、n+1次元ユークリッド空間の中で任意のn次元閉集合Mを与えたとき（ただしMは可算修正可能集合で､n次元ハウスドルフ測度は有限であるか､あるいは無限遠近傍で指数的増大を許す)､Mを初期データとして時間発展するBrakkeの平均曲率流の時間大域存在を証明した。ただし非自明解にならないためには､Mの補集合は非連結であることを要請する。n=1においてはネットワーク状の集合が３重点を持ちながら時間発展するような解を想定している｡類似の結果はn=1の場合の時間局所解でさえ知られていなかったものであり、一般次元で時間大域解の存在を示したという意味で画期的な結果である。

② 特異点集合解析

Brakkeの平均曲率流では３重点が安定的かつ滑らかに動くことが予想されるが、その正則性を示す理論は無かった｡この問題をn=1の場合に解決した(論文５)｡より正確には､1次元のBrakkeの平均曲率流が３重点に測度的な弱い意味で近いならば、その曲率流は局所的に３つの滑らかな曲線が一点で交わった形で動いていることを示した。幾何学的測度論の枠組みで平均曲率流の動く特異点の正則性が証明されたのは初めてである。

③ 境界正則性

Allen-Cahn方程式の特異摂動極限として、ノイマン型境界条件を満たすBrakkeの平均曲率流の存在定理を示し、またそのノイマン型境界条件を特定した（論文７）。また、Allen-Cahn方程式の特異摂動極限を考え､varifoldに対する自然な固定角度条件について考察した(論文１，２)。これらは境界正則性理論ではないが、その理論構成を進めるための自然な仮定が同定されたという意味で意義のある結果である。

（２）界面表面張力と相互作用する場の問題

弱い意味で界面の速度が、平均曲率＋与えられた流速場、という問題を設定する。これは元々その与えられた流速場が流体方程式などを満たしたものであるが、相互作用の部分を簡単のため落として考えたものである。この問題に対し、一般次元において初期値問題を考え、時間大域弱解の存在を示した(論文６)。流速場の正則性の仮定は次元解析的には最良の結果となっている。

（３）研究集会

研究推進および研究成果の情報発信のために以下の研究集会を行った。

① One-day workshop on geometric variational problems, 2013年11月30日、北海道大学（主として当該研究課題の研究分担者およびその関係者による研究発表および意見交換)

② Geometric flows and related problems I, 2016年３月３－４日、東京工業大学（特に国内の幾何的流れ問題の研究者による研究発表)

③ Geometric flows and related problems II, 2017年11月23－25日、東京工業大学（主として海外の幾何的流れ問題の研究者による研究発表)

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計10件）　10.以外は査読有り

1. T. Kagaya, Y. Tonegawa, A singular perturbation limit of diffused interface energy with a fixed contact angle condition, *Indiana Univ. Math. J.* 67, No. 4 (2018), 1425-1437, arXiv:1609.00191
2. T. Kagaya, Y. Tonegawa, A fixed contact angle condition for varifolds, *Hiroshima Math. J.* 47, (2017) no. 2, 139-153, arXiv:1606.00164
3. L. Kim, Y. Tonegawa, On the mean curvature flow of grain boundaries, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 67, (2017) no. 1, 43-142, https://aif.centre-mersenne.org/item/?id=AIF_2017__67_1_43_0 PDF
4. R. Takahashi, Y. Ikura, D. R. King, T. Nonoyama, T. Nakajima, T. Kurokawa, H. Kuroda, Y. Tonegawa and J. P. Gong, Coupled instabilities of surface crease and bulk bending during fast free swelling of hydrogel, *Soft Matter* (2016) 12, 5081-5088, DOI: 10.1039/C6SM00578K

5. Y. Tonegawa, N. Wickramasekera, The blow up method for Brakke flows: networks near triple junctions, ***Arch. Ration. Mech. Anal.*** **221,** (2016) no. 3, 1161-1222, DOI: 10.1007/s00205-016-0981-3
6. K. Takasao, Y. Tonegawa, Existence and regularity of mean curvature flow with transport term in higher dimensions, ***Math. Ann.*** **364,** (2016) no. 3-4, 857-935, DOI: 10.1007/s00208-015-1237-5
7. M. Mizuno, Y. Tonegawa, Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions, ***SIAM J. Math. Anal.*** **47,** (2015) 1906-1932, DOI:10.1137/140987808
8. Y. Tonegawa, A second derivative Hölder estimate for weak mean curvature flow, ***Adv. Calc. Var.*** **7,** (2014) 91-138, DOI:10.1515/acv-2013-0104
9. K. Kasai, Y. Tonegawa, A general regularity theory for weak mean curvature flow, ***Calc. Var. Partial Differential Equations*** **50,** (2014) 1-68, DOI:10.1007/s00526-013-0626-4
10. Y. Tonegawa, Introduction to varifold and its curvature flow, Emerging Topics on Differential Equations and Their Applications, ***Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys.,*** **10,** (2013), 213-226, https://doi.org/10.1142/9789814449755_0017

〔学会発表〕(計 43 件)
1. Y. Tonegawa, Existence and regularity for the Brakke flow, Joint Geometric Analysis Seminar, Chinese University of Hong Kong, China, 2018
2. Y. Tonegawa, Existence and regularity for the Brakke flow, PDE/Applied Math Seminar, Indiana University, USA, 2018
3. Y. Tonegawa, An existence theorem of Brakke flow, Conference on 'Metrics and Measures', Tohoku University, Miyagi, 2018
4. Y. Tonegawa,不安定極小超曲面の存在定理について，数理解析研究所談話会，京都大学，京都府，2017
5. Y. Tonegawa, Existence and regularity theory for Brakke flow, 2017 NCTS Workshop on Nonlinear PDEs, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan, 2017
6. Y. Tonegawa, Existence of multi-phase Brakke flow starting from closed rectifiable set, Workshop on Mean Curvature Flow and Ricci Flow, Fields Institute, Canada, 2017
7. Y. Tonegawa, A time-discrete approximate scheme for multi-phase mean curvature flow, Geometry and Inverse Problems in cooperation with A3 foresight program, Tohoku University, Miyagi, 2017
8. Y. Tonegawa, A time-global existence theorem for mean curvature flow, Free Boundary Problems and Nonlinear PDEs, Hokkaido University, Hokkaido, 2017
9. Y. Tonegawa, A short course on Brakke's mean curvature flow, International Workshop on Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics, Waseda University, Tokyo, 2017
10. Y. Tonegawa, A time-discrete approximate scheme for multi-phase mean curvature flow, Analysis on Shapes of Solutions to Partial Differential Equations, RIMS, Kyoto University, Kyoto, 2017
11. Y. Tonegawa, Existence and regularity for Brakke's mean curvature flow, Calculus of Variations and Nonlinear Partial Differential Equations, UC Berkeley, USA, 2017
12. Y. Tonegawa, Existence and Regularity of Multi-Phase Mean Curvature Flow, International Conference on Moving Interfaces and Related Phenomena in Mathematics and Physics, NYU Shanghai, China, 2017
13. Y. Tonegawa, Existence and regularity of Brakke's mean curvature flow, Nonlinear and geometric partial differential equations, The Australian National University, Australia, 2016
14. Y. Tonegawa, Almgren-Pitts theorem for minimal surface via phase interface energy, 福岡大学微分幾何研究会, Fukuoka Univ. Seminar House, Fukuoka, 2016
15. Y. Tonegawa, Long-time existence of mean curvature flow of grain boundaries, Geometry and probability, RIMS, Kyoto University, Kyoto, 2016
16. Y. Tonegawa, Existence and regularity theories of mean curvature flow, 非線型の諸問題，かんぽの宿湯田，山口県，2016
17. Y. Tonegawa, A new existence theorem for mean curvature flow, Towards regularity, The Institute of Mathematics, Warsaw, Poland, 2016
18. Y. Tonegawa, 幾何学的測度論を用いた平均曲率流の時間大域存在定理，63rd Geometry Symposium, Okayama University, Okayama, 2016
19. Y. Tonegawa, Existence theorem on the mean curvature flow starting from closed rectifiable set, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, 2016
20. Y. Tonegawa, Existence and regularity theories of Brakke flow, Oberseminar, University of Tübingen, Germany, 2016

21. Y. Tonegawa, Existence and regularity theories of mean curvature flow, Variational Problems and Nonlinear Partial Differential Equations 2016, 東京理科大学（千葉県野田市）, 2016
22. Y. Tonegawa, Existence and regularity theories of mean curvature flow, Seminari d'edps i aplicacions, Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2016
23. Y. Tonegawa, On the mean curvature flow of grain boundaries, Oberseminar Analysis-Probability, Max Plank Institute, Leipzig, Germany, 2015
24. Y. Tonegawa, Existence of Brakke's mean curvature flow starting from general condimension one sets, Topics in Geometric Analysis, Albert Einstein Institute, Potsdam-Golm, Germany, 2015
25. Y. Tonegawa, 一般閉集合を初期データとした平均曲率流の弱解存在定理, 九州関数方程式セミナー, 福岡大学セミナーハウス（福岡市中央区）, 2015
26. Y. Tonegawa, A blow up analysis of Brakke mean curvature flow, ICIAM Beijing, China National Convention Center, Beijing, China, 2015
27. Y. Tonegawa, ネットワーク曲率流の 3 重点周りの正則性について, 応用解析セミナー, 東京大学（東京都目黒区）, 2015
28. Y. Tonegawa, Analysis on the mean curvature flow and the reaction-diffusion approximation, Summer School Grenoble 2015, Geometric Measure Theory, Theory and Applications, Fourier Institute, Grenoble, France, 2015
29. Y. Tonegawa, A regularity theorem for Brakke flows near triple junctions, 応用解析研究会, 早稲田大学（東京都新宿区）, 2015
30. Y. Tonegawa, A regularity theorem for Brakke flows near triple junctions, 12th Hamamatsu PDE meeting, 静岡大学（静岡県浜松市）, 2014
31. Y. Tonegawa, Allen-Cahn 型方程式と平均曲率流の存在定理, 非線形偏微分方程式冬の学校, 北海道大学（札幌市北区）, 2014
32. Y. Tonegawa, A regularity theorem for Brakke's curvature flow of networks, Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations and Its Applications, KIAS, Seoul, Korea, 2014
33. Y. Tonegawa, A regularity theorem for Brakke's curvature flow of networks, AMSI/AustMS Conference on Geometric Analysis and Stochastic Methods in Geometry, Univ. of Queensland, Brisbane, Australia, 2014
34. Y. Tonegawa, A regularity theorem for Brakke's curvature flow of networks, Workshop `Calculus of variations', Oberwolfach, Germany, 2014
35. Y. Tonegawa, Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions, 研究集会「保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究」, 京都大学数理解析研究所（京都市左京区）, 2014
36. 利根川吉廣, 平均曲率流の正則性理論について, 日本数学会 2014 年度年会函数方程式分科会特別講演, 学習院大学（東京都豊島区）, 2014
37. Y. Tonegawa, On the regularity of varifold mean curvature flow, Geometry and analysis seminar, Columbia University, New York, USA, 2014
38. Y. Tonegawa, On the regularity of varifold mean curvature flow, Geometric analysis and topology seminar, New York University, New York, USA, 2014
39. Y. Tonegawa, On singular perturbation limit of the Allen-Cahn equation, 2013 SIAM conference on analysis of PDE, Hilton Orlando Lake Buena Vista, Lake Buena Vista, USA, 2013
40. Y. Tonegawa, A time-global existence of mean curvature flow via reaction diffusion approximation, Mathematical Analysis of Pattern Formation Arising in Nonlinear Phenomena, 京都大学数理解析研究所（京都市左京区）, 2013
41. 利根川吉廣, 一般化された平均曲率流の部分正則性理論, 九州大学幾何セミナー, 九州大学伊都キャンパス（福岡市西区）. 2013
42. Y. Tonegawa, Existence and regularity of mean curvature flow with transport term, ERC-Workshop on Geometric Measure Theory, Analysis in Metric Spaces and Real Analysis, De Giorgi Center, Pisa, Italy. 2013
43. Y. Tonegawa, Existence and regularity of mean curvature flow with transport term, Second PRIMA Congress, 上海交通大学, China, 2013

〔その他〕ホームページ等：http://www.math.titech.ac.jp/~tonegawa/toppagejp.htm

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：高坂　良史
ローマ字氏名：KOHSAKA, Yoshihito
所属研究機関名：神戸大学

部局名：大学院海事科学研究科
職名：准教授
研究者番号（8桁）：00360967

研究分担者氏名：石井　克幸
ローマ字氏名：ISHII, Katsuyuki
所属研究機関名：神戸大学
部局名：大学院海事科学研究科
職名：教授
研究者番号（8桁）：40232227

研究分担者氏名：神保　秀一（平成25年度から平成27年度まで）
ローマ字氏名：JIMBO, Shuichi
所属研究機関名：北海道大学
部局名：理学研究院
職名：教授
研究者番号（8桁）：80201565

研究分担者氏名：水野　将司（平成25年度から平成28年度まで）
ローマ字氏名：MIZUNO, Masashi
所属研究機関名：日本大学
部局名：理工学部
職名：准教授
研究者番号（8桁）：80609545

研究分担者氏名：山田　澄生
ローマ字氏名：YAMADA, Sumio
所属研究機関名：学習院大学
部局名：理学部
職名：教授
研究者番号（8桁）：90396416

研究分担者氏名：小池　直之（平成29年度のみ）
ローマ字氏名：KOIKE, Naoyuki
所属研究機関名：東京理科大学
部局名：理学部
職名：教授
研究者番号（8桁）：00281410

(2)研究協力者
研究協力者氏名：キム　ラミ
ローマ字氏名：KIM, Lami

研究協力者氏名：ネシャン　ウィクラマセケラ
ローマ字氏名：WICKRAMASEKERA, Neshan