様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２８７００５

研究課題名（和文）高次元双有理幾何の分類に関する諸問題

研究課題名（英文）Various problems related to the classification in higher dimensional birational geometry

研究代表者
森　重文（Mori, Shigefumi）

京都大学・高等研究院・特別教授

研究者番号：０００９３３２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　5,900,000円

研究成果の概要（和文）：３次元代数多様体であり高々端末特異点というマイルドな特異点しか持たない X から S への端収縮射と呼ばれる写像 f のうち、点 s の逆像 F が曲線となる場合が研究対象であり、特に既約になる F の近傍での端収縮射の分類をめざしている。フリップ収縮射、因子収縮射、Qコニック束の３種類あり、フリップ収縮射については解決済みであり、残り２種について研究した。F上には非Gorenstein点は高々２点であり、１点の場合の分類を本研究で完成させた。

研究成果の概要（英文）：We study extremal contraction morphisms f to S of a terminal threefold X such that the inverse image F of a point s is a curve, and try to classify the neighbourhood of F especially when F is irreducible. They consist of three kinds, flipping contractions, divisorial contractions, and Q-conic bundles. Among them, flipping contractions were classified, and the other two kinds are studied. There are at most two non-Gorenstein points on F, and the classification of the case of one non-Gorenstein point has been completed.

研究分野：数物系科学

キーワード：Qコニック束　因子収縮射　フリップ収縮射　反標準線形系　Du Val特異点　端末特異点　Qデルペゾ束　極小モデルプログラム

１．研究開始当初の背景

Birkar-Cascini-Hacon-MacKernan(2010)により、標数０においては、任意次元の射影多様体に対して、極小モデル理論が多くの重要な場合に機能することが確立した。大まかに言うと、射影多様体に、双有理的な因子収縮射とフリップを有限回施すことにより、最終的に極小モデルか、森ファイバー空間が得られる。

しかしその一方で、双有理幾何では多くの精密な分類問題は４次元以上ではあまりに複雑で、分類する事の現実性自体が疑問視されており、世界の研究の現在の趨勢は、有界性（分類可能性）を扱うことにより極小モデル理論の研究を進める可能性を模索している状況であった。その方向は現在でも同様である。

３次元は分類がある程度出来たものの完全には解明されていない興味深い状況である。端収縮射は双有理幾何というジクソーパズルを解決する重要なピースのようなものだが、例えば、３次元端収縮射の構造はまだ十分に分類されていない。

十分な分類が出来るのは、３次元端末特異点という特異点のクラスであった。そして、ある程度の分類が出来るのは、高々端末特異点しか持たない３次元多様体Xの端収縮射と呼ばれる射f：X → Sであり、森-Prokhorovは共同で研究を続けている。

X は高々端末特異点しか持たない３次元多様体、射 f：X → S は端収縮射、S は２次元以上とする。s は Sの点、F は f による s の逆像とし、f を s の近傍上に制限して射の芽 f：(X,F) → (S,s) を研究する。

Sの次元が０，１，２に応じて、fはQファノ多様体、Q デルペゾ束、Q コニック束と呼ばれる。S の次元が３の時、因子を潰す f は因子収縮射、潰さない f はフリップ収縮射という。

未解決な問題として、X の反標準線形系の一般元に関する一般象予想(Reid) の解決、芽 f の分類などがあった。

以降では F は曲線とする。しばしば更に F は既約と仮定するが、これは代数的な端収縮射を解析多様体の射として分解することによりFが既約な端収縮射の場合に帰着できる問題が多いためである。

（１）一般象予想

Fが既約曲線で、fがフリップ収縮射か因子収縮射の場合は Kollar-森(1992)で解決済み。

F が既約曲線で、f が Q コニック束の場合は森-Prokhorov(2009)により解決済み。

（２） 芽 f の分類（F が既約曲線の場合）

f がフリップ収縮射の場合は Kollar-森(1992)で殆ど解決され、Tziolas (2005)の補足で解決済み。

f が因子収縮射の場合は Kollar-森(1992)に部分的な結果がある。f が Q コニック束で(S,s)が特異点の場合は森-Prokhorov(2008)でFが可約な場合も含めて解決済み。

用語の説明をしておく。

森(1988)において、双有理的な収縮射に対して、曲線 F 上の３次元多様体 X の端末特異点 x における F⊂X のタイプ分けがなされ、森-Prokhorov(2008)により Q コニック束の場合にもタイプ分けが拡張された。

（点xの近傍の分類）：点 x が Gorenstein 点なら III 型、非 Gorenstein 点のうち、主要なものは I 型、例外的なものは II 型と分け、I 型は IA 型、IC 型などと、II 型も IIA 型、IIB 型などと更に細分される。

（曲線 F の近傍の分類）：森-Kollar(1992)において、IB 型など１点xの情報だけで X 全体が特徴付けられる場合には点xでの分類を流用して IB 型などと表示するが、そうでなく、F 全体の情報が必要になる場合もある。このような場合には、X は kAD 型、IA+IA+III 型などと表示される。なお、Q コニック束の場合にも森-Prokhorov(2008)により分類は拡張された。本報告では、これらの用語を用いる。

曲線 F 上には X の非 Gorenstein 点は高々２点である。２点の場合は kAD 型、IA+IA+III 型などからなる。１点の場合は一部分類されており、IC 型、IIB 型、IIA 型が残っていた。

２．研究の目的

主に２次元以上の芽 (S,s) への３次元端収縮射の f:(X,F) → (S,s)に対して、一般象予想、さらには、芽 f の分類を目指した。

（１） 一般象予想

Fが既約曲線で、芽 f がQコニック束の場合の解決。

F が可約曲線の場合にも、一般象予想の解決を目指した。経験上、(1)は次の(2)を研究する重要なステップとなることが予想された。

（２） 芽 f の分類

F が既約曲線で、f の分類を目指した。つまり、非 Gorenstein 点が丁度１点の場合の IC 型、IIB 型、IIA 型、丁度２点の場合の kAD 型、IA+IA+III 型の分類が目的であった。

３．研究の方法

（１） 双有理的な端収縮射については $H^1(\mathcal{O}_X)=0$ や $H^1(K_X)=0$ を解析することにより組合せ論的な条件を導き出し、F の近傍を座標の貼り合わせにより記述するという、森(1988)の手法が出発点。Q コニック束の場合には、$H^1(\mathcal{O}_X)=0$ だが $H^1(K_X)\neq 0$ となることの利用法を発見し、以下の（１）や（２）と組み合わせて組合せ的な条件を導出可能(森-Prokhorov(2007))。

（２） 点 s を含む、S の超曲面切断の射 f:

X→S による引き戻し H の F の近傍全体での（ディンキン図形を用いた）記述と F⊂H⊂X の非 Gorenstein 点の近傍での（座標、方程式等を用いた）記述を併せると、X を H の１変数変形の全空間として復元できるという Kollar-森(1992)の手法を用いる。

（３）H が正規でない場合でも、Tziolas (2005)による H の変形手法を改良・適用することにより、H の１変数変形の全空間として X を再構成する。

（４）因子収縮射 f:X→S は、我々のように X の爆縮と見て研究する手法の他に、ターゲット S の爆発と見て分類を目指す手法も有力である。これらは競合するのではなく、補い合う面もあり興味深い（４の研究成果の項を参照されたい)。ただし今のところ、X から研究する我々は F の既約性を仮定しているのに対し、S から研究するグループも一般象予想を仮定する必要があり、１(1)の我々の結果に基づいている。

４．研究成果

（１）一般象予想

F が可約の場合に解決を目指したが、成果を論文として出版するには至っていない。

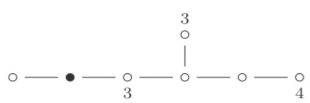
（２）芽 f の分類

F は既約曲線とし、以下では、f は Q コニック束または因子収縮射とする。

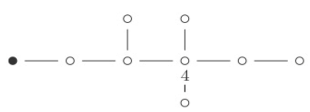
F 上にある X の非 Gorenstein 点は高々２点だが、１点の場合で残っていた、IC 型、IIB 型、IIA 型のうち、IC 型、IIB 型については論文③で分類を出版した。上記３（２)、(３）で述べたように、H が正規であると H から X を再構成する議論は容易であるが、非正規だと複雑になる。IIA 型は予想以上に複雑であったため一度に終えることが出来ず、先ず H が正規になるための必要十分条件を与え、その条件の下で H を分類し、それにより f を s の近傍上で分類し論文②として出版した。

(1.1.1) f *is divisorial*, $f(H) \ni o$ *is of type* A_1,

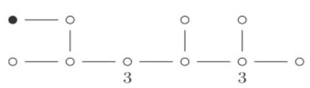
(1.1.2) f *is divisorial*, $f(H) \ni o$ *is of type* A_1,



(1.1.3) f *is divisorial*, $f(H) \ni o$ *is of type* D_5,



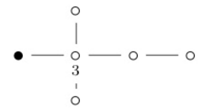
(1.1.4) f *is a* $\mathbb{Q}$*-conic bundle*,



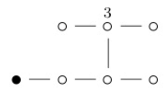
が②の分類結果である。ディンキン図形は H の最小特異点解消の例外曲線を○で、F の逆像を●で表し、○の自己交点数が-2 でない時はその絶対値を付している。●の自己交点数は-1 である。(1.1.1)，(1.1.2)においては F 上に X は高々１点 Gorenstein 特異点を持ちうるが(1.1.3)，(1.1.4)においては持たない。

H が非正規な場合も論文①において完成した。分類結果は、H の正規化のディンキン図形を用いた、次の(1.1.1)と(1.1.2)の２通りになった。○、●、数字の意味は上と同様である。

(1.1.1) f *is divisorial**, $f(H) \ni o$ *is of type* D_5,



(1.1.2) f *is a* $\mathbb{Q}$*-conic bundle over a smooth surface,*



何れの場合も X は F 上に Gorenstein 特異点を高々１点持ちうる。

また、論文①では、因子収縮射 f:X→S を S から構成する手法（上記３（４）参照）では見逃していた場合を発見した。すなわち、(1.1.1)
が、その例を与えるディンキン図形である。少なくとも、この場合は X の爆縮と見る手法の方がより精密であった。

研究時間が上手く確保出来ず解決できなかった、２点の場合および F が可約な場合が次の研究対象である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3 件）

① __森 重 文__、Y. Prokhorov、Threefold Extremal Contractions of Types (IIA). II、Proceedings for Nigel Hitchin's 70th Anniversary Conference 査読有、2017 年 5 月 accepted

② __森 重 文__、Y. Prokhorov、Threefold Extremal Contractions of Types (IIA). I、Izvestiya: Mathematics、査読有、80:5 巻、2016、884—909
DOI：10.1070/IM8516

③ __森重文__、Y. Prokhorov、3-fold extremal contractions of types (IC) and (IIB)、Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society、査読有、57 巻、2014、231−252
DOI：10.1017/S0013091513000850

〔学会発表〕（計 16 件）

① __森 重 文__、On the classification of

algebraic varieties、Kavli IPMU 談話会(招待講演)(国際学会)、2017 年 12 月 11 日、東京大学

② 森重文、On the classification of algebraic varieties、75 Years of Mathematics in Mexico(招待講演)(国際学会)、2017 年 12 月 5 日、メキシコシティ

③ 森重文、On the classification of algebraic varieties、シリーズ談話会（招待講演)、2017 年 11 月 17 日、ベトナム科学技術アカデミー数学研究所、ハノイ

④ 森重文、Extremal contractions of dimension three with fiber dimension 1、SIMONS CONFERENCE IN MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES (BIRATIONAL GEOMETRY)(招待講演)(国際学会)、2017 年 8 月 22 日、サイモンズ財団、米国ニューヨーク市

⑤ 森重文、On the classification of algebraic varieties、数学談話会(招待講演)(国際学会)、2017 年 7 月 14 日、Warwick 大学、英国

⑥ 森重文、On the classification of algebraic varieties、談話会（招待講演)、2017 年 4 月 3 日、サセックス大学、英国ブライトン

⑦ 森重文、代数多様体の分類について、理化学研究所講演会「数理と自然のハーモニー」(招待講演)、2016 年 11 月 18 日、理化学研究所鈴木梅太郎記念ホール

⑧ 森重文、Rational curves on algebraic varieties、韓国数学会 70 周年記念コンファレンス(招待講演)(国際学会)、2016 年 10 月 21 日、Seoul National University, Korea

⑨ 森重文、Rational curves on algebraic varieties、日本数学会秋季総合分科会(招待講演)、2016 年 09 月 16 日、関西大学

⑩ 森重文、Rational curves on algebraic varieties、Hitchin 70 Conference(招待講演)(国際学会)、2016 年 09 月 10 日、Math Institute, Oxford University

⑪ 森重文、Rational Curves on Algebraic Varieties、Benjamin Peirce Centennial Conference(招待講演)(国際学会)、2016 年 06 月 10 日、Harvard University

⑫ 森重文、Rational Curves on Algebraic Varieties - extremal rays and MMP、12th Congress of the Chinese Mathematical Society(招待講演)(国際学会)、2015 年 11 月 22 日、Capital Normal University, Beijing

⑬ 森重文、Rational Curves on Algebraic Varieties - extremal rays and MMP、20th Brazilian Mathematics Colloquium(招待講演)(国際学会)、2015 年 07 月 29 日、IMPA, Brazil

⑭ 森重文、Rational Curves on Algebraic Varieties - extremal rays and MMP、The symposium on geometry at Univ. of Macau(招待講演)(国際学会)、2015 年 05 月 29 日、Univ. of Macau, Macau

⑮ 森重文、代数多様体の有理曲線についてー極小モデルと端射線ー、第一回早稲田大学数学・応用数理談話会(招待講演)、2015 年 04 月 09 日、早稲田大学、東京

⑯ 森重文、Extremal rays and the explicit minimal model program in dimension three、台湾数学会年会総合講演（招待講演）(国際学会)、2014 年 12 月 06 日、国立成功大学、台湾台南市

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
森　重文（MORI SHIGEFUMI）
京都大学・高等研究院・特別教授
研究者番号：00093328

(2)研究分担者
研究者番号：

(3)連携研究者

(4)研究協力者
Prokhorov, Yuri ステクロフ研究所・教授