様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２８７０１３

研究課題名（和文）無限離散群の超剛性へのランダム群からのアプローチ

研究課題名（英文）An approach to the superrigidity of infinite discrete groups via random groups

研究代表者
井関　裕靖（IZEKI, Hiroyasu）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：９０２４４４０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,600,000円

研究成果の概要（和文）：群という代数的対象は「空間の対称性を表す数学的な言葉」でもある。本研究では、これまで個々の特殊な群がもつ性質として扱われてきた「超剛性」を、より広いクラスの群のもつ性質のある意味でのextremalな性質として捉えることを試みた。その成果として、「超剛性」という性質の一部を取り出した「固定点性質」という性質が、ランダムに与えられた群が非常に高い確率でもつ性質・現象であることを様々な設定の下で明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The group is an algebraic object which also gives a description of symmetries of spaces. Some important and interesting groups often admits a property called "superrigidity", which we tried to understand as an extremal property among that involving infinite discrete groups. We could show that a fixed-point property, which should be considered to be an important aspect of superrigidity, is shared by finitely presented groups with overwhelming probability.

研究分野：数物系科学

キーワード：離散群　剛性　調和写像　ランダム群

１．研究開始当初の背景

Margulis超剛性定理によれば，階数2以上の単純 Lie 群の格子の Riemann 対称空間や Bruhat-Tits ビルディングへの非自明な作用は，本質的にその格子を含むLie群に付随するRiemann対称空間への標準的な作用に限る．また，これらのLie群の格子の種々の空間への作用は，往々にして非自明な摂動をもたない，すなわち剛性をもつことが知られている．このような性質は，とくに階数が2以上のLie群や代数群の格子がもつ特殊な性質として興味を集め，研究が続けられてきた．しかしながら，このような視点からの研究は，剛性という現象の背景を明らかにするには至らず，むしろ，剛性という性質が格子のようなある種 exotic な群のもつ特異な性質だという印象を与えてきたように思われる．一方で，近年，ここで問題にしている超剛性に近い性質をもつ群が豊富に存在するということを示唆する研究成果が続々と現れていた．その主たる背景として，次の二点を挙げることができる．

第一点は，前世紀末以後に，Gromov, M.-T.~Wangおよび研究代表者と納谷信氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）の研究に見られるような，離散的な対象を離散的なまま扱う様々な手法が開発されたことである．上で述べたような格子の剛性は，格子を含むLie群あるいは代数群の性質あるいはそれに付随する Riemann 対称空間や Bruhat-Tits ビルディングの幾何学的性質を用いて導かれていた．そのため，離散群そのもののどのような性質が剛性と関わっているのかを見極めるのが困難であったが，この点に幾つかの進展の兆しが現れていた．

第二点は，マーク付き群やランダム群といった無限群を扱う新しい枠組みの登場であった．今までは無限離散群と言えば，具体的に扱い得るLie群の部分群などの線形群が主な対象であった．このような状況では，個々の群に対して剛性をもつか，もたないかを問うことが主たる問題となる．しかし，マーク付き群やランダム群といった新しい概念が現れたことにより，一般的な無限群がもつ性質について論じることができるようになった．例えば，Gromov, Zuk は，ランダム群のHilbert空間に対する固定点性質を研究し，ある状況ではHilbert空間に対する固定点性質(Kazhdan の性質(T)と同値である)が非常に一般的な性質となることを示していた．　その後，研究代表者と納谷信氏，および近藤剛史氏（鹿児島大学理学部）の共同研究，あるいは Silberman-Naor 等の研究により，ランダム群のより一般的な距離空間に対する固定点性質が研究され，やはり，ある状況では広いクラスの距離空間に対する固定点性質が一般的な性質になることが導かれていた．ここで，群が距離空間に対する固定点性質をもつとは，群のその距離空間への等長的作用が必ず固定点をもつことをいう．したがって，群が広いクラスの距離空間に対する固定点性質をもつことは，その群がある程度限定された距離空間に対してしか非自明な作用をもたないことを意味する．この点で，広いクラスの距離空間に対する固定点性質を，その群の剛性の強さを表す，ある意味で超剛性に近い性質とみなすことができる．上の成果は，超剛性に近い性質が実は一般的な性質であることを主張しているわけである．

これらの進展を背景として，次のような目的で，本研究を開始した．

２．研究の目的

本研究の目的は，上記のような研究の流れをさらに推し進め，この超剛性という現象を固定点性質等の超剛性と関係の深い種々の性質のある種の extremal な状況として見直し，その幾何学的背景を明らかにすることである．そのための第一段階として，ランダム群の種々の空間に対する固定点性質について考察する．ランダム群の固定点性質についての一定の知見が得られた後は，その成果を下に，離散群のポアソン境界の幾何構造等に注目し，超剛性の幾何学的背景の解明を試みる．

３．研究の方法

本研究で扱うランダム群について簡単に説明しておく．(P)を群のある性質とする．群の有限表示をある仕方でランダムに与えたとき，得られる群が性質(P)を非常に高い確率でもつとき「そのランダム群は性質(P)をもつ」と言われる．例えば，m, l を自然数，d を $0<d<1$ をみたす実数とし，P(m,l,d)を 2m 個の生成元と長さ l の関係子をおおよそ $(2m)^{dl}$ 個もつ群の表示のなす集合とする．このP(m,l,d)はランダム群のプレイン・ワード・モデルとよばれている.P(m,l,d)からランダムに表示を選んだとき，得られる群が性質(P)をもつ確率が $l\to\infty$ としたとき 1 に収束するとき，「プレイン・ワード・モデルのランダム群は性質(P)をもつ」という．ランダム群のモデルは他にも様々なものがあるが，任意の有限表示群に対してある m,l,d が存在し P(m,l,d)に属するある表示から得

られる，という意味で，プレイン・ワード・モデルのランダム群はもっとも一般的なランダム群のモデルである．本研究では，プレイン・ワード・モデルのランダム群のほかにも，ラプラス作用素の固有値が下から一様に抑えられた expander と呼ばれる有限グラフの列を用いて定義される，Gromov のグラフ・モデルのランダム群を扱う．これまでの研究からグラフ・モデルのランダム群は，プレイン・ワード・モデルのランダム群より強い剛性をもつ傾向があることがわかっている．本研究では，これらのランダム群が比較的強い固定点性質あるいは剛性をもつことを示すことにより，超剛性に類する性質が有限表示群全体において比較的一般的だとみなせる性質であることを明らかにし，これまでとは異なる視点から剛性現象に対する理解を深めることを試みた．

本研究以前に，研究代表者はプレイン・ワード・モデルと呼ばれるランダム群に対し，Hilbert 空間を含む非正曲率距離空間（CAT(0)空間）に対する固定点性質を証明していた．その際，与えられた作用が固定点をもつことを導くには，離散群からの同変写像の n ステップ・エネルギーの n に関する増大度の評価から，1 ステップ・エネルギーの勾配流が定値写像に収束することを示す手法を用いた．一方，与えられた表示から得られる群の任意の作用が固定点をもつことは，「非常に高い確率で」n ステップ・エネルギーの増大度が，与えられた群の有限表示から得られる有限グラフのラプラス作用素の固有値から評価できる，ということを用いて示している．群の表示から得られる有限グラフのラプラス作用素の固有値は，表示だけに依存するので，この固有値によるエネルギーの増大度の評価はその群の作用の選び方にはよらない．このことから，任意の作用が固定点をもつことが示され，固定点性質が導かれる．ここで本質的なことは，固有値によるエネルギー増大度の評価は，一般的には正しくなく，あくまで「高い確率で」しか成立しない，ということである．

Lille 大学（フランス）の Marc Bourdon 氏と共同で，この固有値の評価とエネルギー増大度の関係を，Lp 空間に対して（Hilbert 空間の場合とはかなり異なる手法で）拡張することで，プレイン・ワード・モデルのランダム群が Lp 空間に対する固定点性質をもつことの証明を行った．

また，これとは異なる方向への一般化として，連携研究者の納谷信氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）および近藤剛史氏（鹿児島大学理学部）との共同研究で，この手法を Hilbert 空間のアファイン作用へと拡張し，プレイン・ワード・モデルのランダム群の Hilbert 空間へのある仮定をみたすアファイン作用の固定点性質を示すことへと適用した．プレイン・ワード・モデルのランダム群より強い剛性をもつ傾向があるグラフ・モデルのランダム群については，より弱い仮定の下で固定点性質が導くことを試みた．

また，このランダム群からの極限操作で得られる群の剛性を含む種々の性質についても，Baum-Connes 予想との関係，あるいはこの群に付随する群 C*環の研究等，非可換幾何あるいは作用素環からの視点を取り入れて，前田吉昭氏と勝良健史氏との研究討論を行った．

４．研究成果

上にも述べた通り，本研究は，離散群の超剛性という性質を，離散群の距離空間への作用に関する固定点性質等の性質のある種の exremal な状況として見直し，その幾何学的背景を明らかにすることを目的としていた．そのためには，種々の固定点性質を導く十分条件を明らかにし，そのような条件を満たす群の分布に関する考察を行う必要があった．

2013 年度から 2014 年度にかけて，フランス，リール大学の Marc Bourdon 教授との共同研究で，プレイン・ワード・モデルのランダム群か Lp 空間に対する固定点性質をもつことを証明することができた．すでに同じランダム群が Hilbert 空間あるいは特異性を抑えた非正曲率距離空間に対する固定点性質をもつことは示していたが，この結果を示すにあたっては Marc Bourdon 教授の Lp 空間に対する固定点性質に関する先行研究が重要な役割を果たした．超剛性をもつ群は，Lp 空間に対しても強い固定点性質をもつことが観察されているので，この結果は，多くの有限表示群が超剛性に近い性質を持っていることを示唆していると見ることができる．この結果には，まだ改善の余地があり，現在でも論文としてまとめるには至っていない．早急に改善を完了させたいと考えている．また，このプレイン・ワード・モデルのランダム群からある種の極限操作により得られる群は，Lp 空間に対する非常に強い固定点性質をもつことが期待され，ある種の超剛性をもち得るのではないかと考えている．この点を明らかにするのは今後の課題の一つである．

2014 年度からは，ランダム群の Hilbert 空間へのアファイン作用に関する固定点性質について考察した．これまで，主に考察の対象としていたのは，離散群の距離空間への等長的な作用であった．一方，Hilbert 空間には有界な線形変換と平行移動により生成されるアファイン変換と呼ばれるよい変換

が存在する．離散群の剛性との関わりの深さが指摘されている Kazhdan の性質(T)は，Hilbert 空間への等長的作用に関する固定点性質と同値であることはよく知られている．一方，Lafforgue 等は Hilbert 空間へ のアファイン作用に関する固定点性質が，より強い剛性との関連をもつことを指摘している．(等長変換はとくにアファイン変換なので，アファイン作用に関する固定点性質は，等長作用に関する固定点性質より強い性質である．）このような背景の下で，2015 年度から 2016 年度にかけて，連携研究者の納谷信氏，近藤剛史氏とともに，グラフ・モデルのランダム群，および，プレイン・ワード・モデルのランダム群が，ある仮定を満たすアファイン作用に関する固定点性質を満たすことを示すことに成功した．ここでアファイン作用に課したのは， その Lipschitz 定数か低い増大度をもつ，あるいは Lipschitz 定数が一様に有界，という仮定である．比較的強い仮定の下ではあるが，これらのランダム群がアファイン作用に関する固定点性質をもつことが示されたことは，強い剛性をもつ離散群が非常に多く存在することを示唆する興味深い結果である．こちらも細部の改善を行い，結果の改良(仮定を弱める)を試みている段階で，現在論文は準備中である．

2017 年度にはランダム群とは少し異なる視点から超剛性を捉えることにも取り組み始めた．離散群にランダム・ウォークが与えられると，その時刻無限大での分布を表す確率空間であるポアソン境界が定義される．離散群が非正曲率距離空間に作用しているとき，その作用の rate of escape と呼ばれる量が正であれば，ポアソン境界から非正曲率距離空間の幾何学的境界への同変写像の存在が導かれることが Karlsson-Margulis により示されている．離散群が局所コンパクトな非正曲率距離空間に作用しているとき，離散群からその非正曲率距離空間への同変調和写像が存在する場合には，その作用が平坦部分空間を不変にするか，または rate of escape が正になることを予想している．作用を受ける空間が負曲率距離空間である場合に，対応する結果の証明を与えることはできた．この予想が正しければ，非正曲率距離空間 X に固有不連続かつ余コンパクトに作用する群が非正曲率距離空間 Y への rate of escape が正になる作用をもつとき，X の Tits 境 界から Y の Tits 境界への写像が存在することが示される．負曲率距離空間と平坦部分空間を含む非正曲率距離空間の境界の Tits 構造には著しい違いがあることが知られている．今後は，この違いに注目することにより，離散群の超剛性現象の幾何学的背景を明らかにしていきたい．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① <u>井関 裕靖</u>，A fixed-point property of random groups，京都大学数理解析研究所講究録 2062 (2018) 94-107.（査読なし）
② <u>Hiroyasu Izeki</u>, Fixed-point property of random quotients by plain words, Groups, Geometry, and Dynamics 8 (2014), 1101-1140.（査読あり）
③ <u>Yoshiaki Maeda</u>, Atsushi Sako, Deformation quantization of gauge theory in R4 and U(1) instanton problems, Noncomuutative geometry and physics, 3 (2013), 471-483 （査読あり）

〔学会発表〕（計 6 件）

① <u>Hiroyasu Izeki</u>, A fixed point property of random groups, Boston-Keio Workshop, Boston University, 2017 年 6 月．（招待講演）
② <u>Hiroyasu Izeki</u>, A fixed-point property of random groups, Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Geometry，京都大学数理解析研究所，2016 年 6 月．(招待講演)
③ <u>井関裕靖</u>，離散群のポアソン境界と剛性，福岡微分幾何研究会，福岡大学セミナーハウス，2015 年 11 月．(招待講演)
④ <u>井関裕靖</u>，離散群の剛性と同変写像のエネルギー増大度，福岡微分幾何研究会，福岡大学セミナーハウス，2014 年 11 月．（招待講演）

〔図書〕（計 1 件）

小林治，芥川和雄，<u>井関裕靖</u>，山辺の問題，数学メモアール，日本数学会 2013 年．

〔産業財産権〕

６．研究組織

(1)研究代表者
井関 裕靖（IZEKI，Hiroyasu）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90244409

(2)研究分担者
前田 吉昭（MAEDA，Yoshiaki）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40101076
（2013 年度のみ）

勝良 健史（KATSURA，Takeshi）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：50513298

服部 広大（HATTORI, Kota）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：30586087
（2014 年度から）

(3)連携研究者
納谷 信（NAYATANI, Shin）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70222180

(4)研究協力者
近藤 剛史（KONDO, Takefumi）
鹿児島大学・理学部