様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５２８７０１６

研究課題名（和文）多様体上の逆散乱理論の新局面-格子からオービフォールドまで

研究課題名（英文）New aspects of inverse scatterng theory on non-compact manifolds-from lattices to orbifolds

研究代表者
礒崎　洋（Isozaki, Hiroshi）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：９０１１１９１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,500,000円

研究成果の概要（和文）：離散モデルから連続モデルまで数理物理学や幾何学に現れる非コンパクトな多様体上で古典物理学や量子物理学における散乱現象に関する逆問題を研究した。離散モデルとしては六角格子を含む格子上でのシュレーディンガー作用素に対するS行列から、コンパクトな台を持つポテンシャル、あるいは格子の欠損を再構成する逆問題を解決した。連続モデルとしては考えうる自然なクラスの中では最も広いリーマン計量をもつ非コンパクト多様体において一つのエンドに対応するS行列の成分からリーマン計量を再構成した。ここには数論に現れるオービフォールドも含まれる。

研究成果の概要（英文）：On some non-compact manifolds with general metric, we have proven that the knowledge of S-matrix of one fixed end determines the whole Riemannian metric. The behavior of the metric at infinity is general enough to include all natural metrics. It also includes orbifolds appearing in number theory. We have proven that from the S-matrix of the Schroedinger operator on perturbed periodic lattices which include the case of graphen we can recover the compactly supported potentials and/or defects of the lattice. We have also proven that from the scattering operator of the Maxwell equation in an exterior domain with arbitrary anisotropic medium in a bounded part we can determine the 1st Bettii number of the boundary.

研究分野：散乱理論

キーワード：逆問題　シュレーディンガー作用素　S行列　ディリクレーノイマン写像　境界制御法

１．研究開始当初の背景

音波・光波は空間内を伝播し媒質や障害物によって散乱される。散乱現象は巨視的世界を記述する古典物理学のみならず微視的世界を記述する量子物理学においても物質の構造の解明に重要な役割をはたしている。散乱の逆問題とは、散乱波を観測することによって空間自身の構造や空間内の物質の情報を得ようとするもので、我々を取り巻く世界を認識する基本的な手段である。散乱理論は現実的な問題から派生するものであるが、物理学・工学・医学に豊富な応用を持つだけではなく、純粋数学においても理論的発展の源となる基本問題を提供し続けてきた。近年、逆散乱理論の研究が急速に進展しつつあり、その対象はユークリッド空間内の領域のみならず、一般の多様体、さらに離散的な格子にも拡大しつつある。特に格子上の問題は現在の固体物理学における中心的問題であるが、数値計算に直結するのみならず数理物理学の理論的発展にも大きな影響を及ぼす可能性がある。

現実問題の研究の上で最も重要なのはその第一段階であるモデル化の部分であるが、それは理論面、計算面での我々の理解と力量に依存する。そして真実は単純ではなく、離散と連続の中間に広がりをもって存在しているように思われる。自然現象の理解に連続モデルを用い、それを各段階において離散近似して数値計算を行うというのが伝統的な微分方程式論的アプローチであるが、離散的現象を連続モデルで近似している場合もある。自然現象の離散モデルと連続モデルはその性質に大きな違いがあり、一見したところ統一的な視点はない。しかし両者を平行させて眺めることにより、互いに他を近似として理解する考え方は自然である。それは数値計算にも発展を促す可能性があろう。理論構成の際に離散モデルの中に一貫した理論があれば、離散モデルと連続モデルとを対照することにより、理論と数値計算とを一貫して把握できる体系を得ることができるであろう。

本研究はこのような発想から逆散乱問題において離散モデル、連続モデルの双方の典型例を取り上げ、両者を平行に見ることを可能にする逆散乱理論の構築を目指した。本研究の代表者はこれまで非コンパクト多様体の典型例（漸近的ユークリッド空間、漸近的双曲空間、漸近的柱状領域）と正方格子上のシュレーディンガー作用素に対して逆散乱問題の研究を行ってきた。この研究をさらに発展させ、離散から連続まで一貫した視野で逆散乱問題を把握する研究方法を確立することを本研究の主要な課題とした。

２．研究の目的

離散モデルとしてグラフェン等の物理的に重要な例を含む格子を一般的に扱える格子のクラスを設定し、その上のシュレーディンガー作用素に対するスペクトル・散乱理論を展開する。連続モデルとして自然な最も広いリーマン計量のクラスを考え、無限遠でこの計量に漸近するような非コンパクトリーマン多様体上のラプラシアンに対してスペクトル・散乱理論を展開する。この両者に対する逆散乱理論を平行な形で構成する。すなわち、無限遠において与えた入射波に対して無限遠に帰ってくる散乱波を対応させる散乱行列を構成し、散乱行列から元の作用素や空間を再構成する逆散乱理論を構築する。

３．研究の方法

これらの離散・連続的多様体上のラプラシアンの連続スペクトルを決定し、レゾルベントに対する極限吸収原理を証明する。レゾルベントの無限遠での漸近展開をもとめ、連続スペクトルを記述するための一般化されたフーリエ変換を構成する。多様体上のラプラシアンに対するヘルムホルツ方程式の解空間を一般化されたフーリエ変換によって特徴づける。さらにＳ行列を一般化されたフーリエ変換によって表示する。逆問題を考えるために多様体上の有界領域をとり、そこでの境界値問題に対するディリクレ-ノイマン写像を考える。有界領域の外部に関する情報を既知として、全空間におけるＳ行列から有界領域におけるディリクレ-ノイマン写像が定まることを示す。このディリクレ-ノイマン写像から多様体の有界部分における計量や作用素を決定する。

４．研究成果

いくつかのエンドを持つ非コンパクトなリーマン多様体において、一つのエンドに対するＳ行列から多様体全体を再構成できることを証明した。より正確には、このような多様体が２つあり、エンドのうちの一つが等長でこのエンドに対応するＳ行列の成分がすべてのエネルギーに対して一致するとする。このとき２つの多様体は等長であることが示される。各エンドは無限遠における体積が無限大である場合も０である場合（カスプ）も許される。また計量は連続スペクトルを持つ計量としては自然な最も広いクラスである。逆問題部分の証明には境界制御法を用いる。多様体としては微分可能なもののみならず数論に現れるオービフォールドも扱うことができ、この結果の意義は深い。オービフォールドをさらに一般化して錘状特異点を持つ多様体のクラスが考えらえるが、この逆問題の結果は錘状多様体上へも拡張されることが予想され、現在この方向の研究を進めている。

六角格子を含む広いクラスの格子の有限部分を任意に摂動し、さらにポテンシャルも加えたシュレーディンガー作用素に対してスペクトル・散乱理論を構築した。極限吸収原理、一般化されたフーリエ変換を通じて格子上のヘルムホルツ方程式の解空間を考え、解の無限遠における挙動からＳ行列を構成し

た。さらに有界部分において境界値問題を考え、ディリクレ-ノイマン写像が S 行列と同値であることを証明した。有限グラフに対しては逆問題が完成されていることを利用し、ネットワーク問題としては逆問題が一般的に解けることを証明した。六角格子に対してはS行列からコンパクトな台をもつポテンシャルが再構成できることを証明した。この再構成は有限な手続きであり、実行可能なアルゴリズムとして確立している。六角格子の有限部分に格子欠損がある場合に欠損の位置が判定できることを示した。これはグラフェン等の現実の物質において欠損の位置を散乱データによって決定できることを意味しており、応用上重要である。

古典物理学での逆散乱の問題としてマックスウエルの方程式の外部領域での散乱問題を研究した。媒質は無限遠の近くでは真空と同じであるが、有界部分では任意の異方性を許すものとする。この外部境界値問題に対応するマックスウエル作用素のスペクトル理論を構築し、極限吸収原理、固有関数展開、ヘルムホルツ型方程式、S 行列の固有関数表示などのスペクトル順問題を完成させた。さらにこのマックスウエル方程式の有界領域での境界値問題を考え、電場の境界値に磁場の境界値を対応させる electric-magnetic operator (ディリクレ-ノイマン写像に相当する)が S 行列と同値であることを示した。これにより散乱の逆問題が境界値逆問題に帰着され、媒質を散乱データから決定することが可能になった。特に、一般の異方性を許す領域で散乱データが領域の境界のベッチ数を決定することが示された。ユークリッド空間を局所的に摂動した非コンパクト多様体においても同様の定理が成り立つ。非コンパクト多様体上の微分形式に対する逆散乱問題は全く手のついていない分野であるが、この結果は多様体上の微分形式に対する逆散乱問題の研究方法の指針を与えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

(1)K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka, Spectral properties of Schroedinger operators on perturbed lattices, to appear in Ann. Henri Poincare, DOI 10.1007/s00023-015-0430-0 （査読有）

(2)H.Isozaki and H. Morioka, Inverse scattering at a fixed energy for discrete Schroedinger operators on the square lattice, Ann. l’Inst. Fourier 65, 3 (2015), 1153-1200. （査読有）

(3)P.Gaitan, H.Isozaki, O.Poisson, S.Siltanen and J.Tamminenn, Inverse problems for time dependent singular heat conductivities – Multi-dimensional case, Comm. in PDE.40 (2015), 837-877. （査読有）

(4)H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, Inverse scattering on multi-dimensional asymptotically hyperbolic orbifold, Contemporary Mathematics 640 (2015), 71-85,http://dx.doi.org/10.1090/conm/640/12839.（査読有）

(5)H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, Recent progress of inverse scattering theory on non-compact manifolds, Contemporary Mathematics, 615 (2014),143-163.http://dx.doi.org/10.1090/conm/615/12290（査読有）

(6)H. Isozaki and H. Morioka, A Rellich type theorem for discrete Schroedinger operators,Inverse Problems and Imaging, 8(2014),475-489.doi10.3934/ipi.2014.8.475（査読有）

(7)P.Gaitan, H.Isozaki, O.Poisson, S.Siltanen and J.Tamminenn, Inverse problems for time-dependent singular heat conductivities – One-dimensional case, SIAM J. Math. Anal. 45 NO 3, (2013), 1675-1690（査読有）

〔学会発表〕（計２７件）

主なもの（すべて招待講演）

(1) H.Isozaki, Asymptotic properties of solutions to the elastic equation in a half-space, Conference “Control of PDE’s and Applications”, (CIRM

Marseille, France, 2015/11/12)

(2) H.Isozaki, Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric, Conference "Modern theory of wave equations, Semiclassical analysis : Spectral theory and resonances", (Schroedinger Institute, Wien, Austria, 2015/8/28)

(3) H.Isozaki, Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric, Conference "Spectral and analytic inverse problems", (Institute Henri Poincare, Paris, France, 2015/5/5)

(4) H.Isozaki, Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric, Conference "Mathematical Physics ", (Nantes, France, 2015/2/3)

(5) H.Isozaki, Spectral properties for Laplacians on non-compact manifolds with general ends, Conference "Inverse Problems and Related Topics, (Euler Institute, St. Petersburg, Russia, 2014/8/19)

(6) H.Isozaki, Spectral theory and inverse problems for Laplacians on perturbed lattices,
AIMS conference, (Madrid, Spain, 2014/7/9)

(7) H.Isozaki, Spectral theory and inverse problems for Laplacians on perturbed lattices, Conference "Recent progress in mathematical and numerical analysis of inverse problems", (CIRM, Luminy, Marseille, France, 2014/5/19)

(8) H.Isozaki, Inverse scattering on asymptotically hyperbolic orbifolds, Conference "Spectral Theory and Partial Differential Equations", (UCLA, LosAngels, USA, 2013/6/18)

(9) H.Isozaki, Inverse scattering on perturbed lattice, Workshop "Inverse Problems and Applications", (Mittag-Lefler Institute, Stockholm, Sweden, 2013/4/22)

〔図書〕(計１件)
H. Isozaki and Y. Kurylev, Introduction to spectral theory and inverse problems on asymptotically hyperbolic manifolds, MSJ Memoire 32, Math. Soc. Japan, World Scientific (2014). 251ページ,

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
磯崎　洋 (ISOZAKI, Hiroshi)（筑波大学・数理物質系・教授）

研究者番号： 90111913

(2)研究分担者
山本昌弘 (YAMAMOTO, Masahiro（東京大学・数理物質科学研究科・教授）

研究者番号： 50182647