様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2018
課題番号：２５２８７０２１
研究課題名（和文）無限次元タイヒミュラー空間上のヴェイユ・ピーターソン計量の研究

研究課題名（英文）Research on the Weil-Petersson metric of infinite dimensional Teichmueller spaces

研究代表者
松崎　克彦（Matsuzaki, Katsuhiko）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：８０２２２２９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　12,800,000円

研究成果の概要（和文）：ヘルダー連続微分をもつ単位円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間を普遍タイヒミュラー空間の部分空間として導入した．この空間に複素バナッハ多様体の構造を与え，その位相は写像のヘルダー定数から定義される位相と一致することを証明した．また，等角重心拡張がタイヒミュラー空間からの連続な切断を定義することも証明した．次に，そのような微分同相写像群が対称写像による共役に関する剛性をもつことを示した．応用として，その群が同じ滑らかさをもつ微分同相写像でメビウス変換群に共役となるための条件を与えた．ヴェイユ・ピーターソン計量をもつ可積分タイヒミュラー空間に等長的に作用する群の固定点をみつける方法によった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
タイヒミュラー空間は曲面の構造のパラメーター空間として，数学の諸分野や数理物理学の研究において重要な役割をもっている．曲面のコンパクト性が崩れるとき，タイヒミュラー空間は無限次元になり，空間の構造はその上の計量により制御される．本課題は，ヴェイユ・ピーターソン計量という代表的な計量を中心に研究を開始したが，それに留まることなく，広く新しいタイヒミュラー空間とその上の複素構造，計量構造を導入する方法と，その特性についての研究成果を得た．その学術的意義は，タイヒミュラー空間論の発展のひとつの方向性を与えたことであり，数学の各分野で現れるモジュライの問題を扱う上での可能性を提示したことである．

研究成果の概要（英文）：We introduced the Teichmueller space of diffeomorphisms of the unit circle with Hoelder continuous derivatives as a subspace of the universal Teichmueller space. We provided a complex Banach manifold structure for it and proved that its topology coincides with the one induced by the Hoelder constants of the maps. We also proved that the barycentric extension induces a continuous section from the Teichmueller space of the circle diffeomorphisms with respect to this topology. Then, we considered deformations of a group of circle diffeomorphisms with Hoelder continuous derivative and showed certain rigidity under conjugation by symmetric homeomorphisms of the circle. As an application, we give a condition for such a diffeomorphism group to be conjugate to a Moebius group by a diffeomorphism of the same regularity. The strategy is to find a fixed point of the group which acts isometrically on the integrable Teichmueller space with the Weil-Petersson metric.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間　擬等角写像　擬対称写像　ベアス埋め込み　等角重心拡張

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) タイヒミュラー空間上に定義されるヴェイユ・ピーターソン計量はタイヒミュラー計量とならんで空間の幾何構造を特徴づける重要なものである．有限次元タイヒミュラー空間においてはこれまで Wolpert を中心として，フェンチェル・ニールセン座標を通してリーマン面の双曲幾何の研究に重要な役割を果たしてきた．近年はモジュライ空間の体積 (Mirzakhani) や双曲３次元多様体の凸核の体積，パンツ複体における距離 (Brock) との関連で再び注目されていた．またタイヒミュラー空間のヴェイユ・ピーターソン計量に関するコクセター複体の CAT(0) 構造の研究 (Yamada) をはじめとして，測地線の挙動の研究 (Minsky) など有限次元タイヒミュラー空間論の中心的な研究対象となっていた．

(2) このような状況に呼応して，無限次元タイヒミュラー空間上にもヴェイユ・ピーターソン計量を導入し，有限次元空間での理論を手本にした新たな理論の展開が開始されつつあった．たとえば，コンパクトリーマン面の profinite 極限（ソレノイド）のタイヒミュラー空間は無限次元であるが，有限次元空間の極限として表されるものであり，この上のヴェイユ・ピーターソン計量に関する研究は Ehrenpreis 予想の別バージョンとして先行研究されていた (Markovic).

(3) 本研究課題では, Cui (Science in China 2000) および Takhtajan-Teo (Mem. Amer. Math. Soc. 861, 2006) により定義された普遍タイヒミュラー空間の層構造とその上のヴェイユ・ピーターソン計量の解析を行うことを予定した.

(4) タイヒミュラー空間への擬等角写像類群の作用の問題の研究では，ある部分空間への等長作用が固定点をもつための条件を与えることができるかどうかは，その空間のもつ計量によることが多い．たとえばタイヒミュラー計量ではこれは不可能であり，一様対称写像群という部分群がタイヒミュラー空間のある閉部分空間に固定点をもたずに作用しうることがわかっていた．ヴェイユ・ピーターソン計量はこの問題点を克服できる可能性がある．

(5) ヴェイユ・ピーターソン計量を円周上の微分同相写像群の力学系に応用するための研究の基盤は既に存在した．そのような群のメビウス群への共役可能性問題に関して，ある空間への微分同相写像群の等長作用を考察し，固定点の存在位置から共役写像の微分オーダーを調べることができると期待されていた．同相写像群がメビウス群へ位相共役となるための条件は Tukia, Gabai 等により収束群という位相的性質であることが示され，３次元多様体の幾何化プログラムに応用された．しかし，この結果をタイヒミュラー空間論や複素力学系に適用するためには，擬対称性というカテゴリーで考える必要があり，共役写像にも同じ滑らかさが要求される． Markovic (J. Amer. Math. Soc. 2006) はこの基本定理を証明した．一方，同時期に Navas (Ann. Acad. Sci. Fenn. 2006) は微分同相写像群に対する微分共役を証明したが，円周上の射影構造の空間に作用させるため，微分可能性には C3 級の仮定が必要であった．また Ghys は曲面群の十分滑らかな微分同相写像群への表現の局所剛性を証明していた．

２．研究の目的

(1) 普遍タイヒミュラー空間の部分空間上に定義されるヴェイユ・ピーターソン計量を解析する．さらにこれを一般化した p 乗可積分ヴェイユ・ピーターソン計量（無限次元フィンスラー計量）を導入し，その幾何学的性質と解析的特徴づけの両面を研究し，普遍タイヒミュラー空間のバナッハ多様体としての構造を考察する．とくに，計量の負曲率性と一様凸性の定式化を行う．

(2) 円周上の擬対称写像群および微分同相写像群のタイヒミュラー空間への作用の固定点問題に統一的解釈を与える．とくに円周上の微分同相写像群のメビウス群への共役可能性問題に関して，ヴェイユ・ピーターソン計量をもつ p 乗可積分タイヒミュラー空間への微分同相写像群の等長作用の固定点の存在位置から共役写像の微分オーダーを調べる．また微分同相写像群の剛性定理のタイヒミュラー空間論による解釈も与える．

３．研究の方法

(1) 有限次元タイヒミュラー空間上のヴェイユ・ピーターソン計量を考える上では可積分条件を考慮する必要はないが，無限次元の場合はベルトラミ微分が双曲計量に関して２乗可積分となるような部分空間に制限してヴェイユ・ピーターソン計量を定義する. したがって，タイヒミュラー空間全体としては，このような計量をもつヒルベルト多様体の層として表現される．無限次元タイヒミュラー空間への応用では，ベルトラミ微分の可積分条件が写像の滑らかさなど種々の解析的パラメーターを反映するため，２乗可積分に限定しない変形空間を用意する必要が生じる．この研究ではまず p 乗可積分なベルトラミ微分で定義されるタイヒミュラー空間の部分空間を定義し, ベアス埋め込みの性質等, その複素構造（バナッハ多様体）に関する基礎をつくる．その上で p 乗可積分ヴェイユ・ピーターソン計量（フィンスラー計量）を導入し，その幾何学的な性質を考察する．フィンスラー多様体や一般の距離空間に対する負曲率性の概念は微分幾何で活発に研究されている分野であり，

それらの成果を取り入れて，しかるべき構造を定式化する．また，負曲率性とは別方向の概念であるが，p 乗可積分空間などのバナッハ空間のもつ一様凸性を一般化した性質がこの計量にも遺伝することが期待でき，それを証明する．さらに，完備性およびタイヒミュラー計量との関係を考察する．そのために，双対空間である q 乗可分正則２次微分形式のノルムを用いて共役計量を定義する．タイヒミュラー計量は１乗可積分正則２次微分形式のノルムを共役計量としてもつので，タイヒミュラー計量による下からの評価を得る．上からの評価としては，フィンスラー計量により定まる距離をベルトラミ微分のノルムで評価することをおこなう．

(2) 函数論では擬対称写像の擬等角拡張の理論として Carleson (J. d'Analyse Math. 1967) に始まる漸近的等角写像の概念があり，擬等角写像の歪曲率の境界での双曲計量のα乗の減衰オーダーと，境界値である擬対称写像の微分オーダー 1+αとの関係が示されている．漸近的等角写像は近年，Earle-Gardiner-Lakic による漸近的タイヒミュラー空間の理論に使われているが，ここで有用となるのは双曲計量に関する２乗可積分な歪曲率をもつ擬等角写像の空間である．この空間にはヴェイユ・ピーターソン計量が定義され， CAT (0) 空間となる．微分同相写像群はこの空間に等長的に作用し，その軌道が有界ならば固定点をもつことは一般論より知られている．固定点は共役写像に対応する．したがって，微分オーダーを反映するような同種の空間を構成し，それに対してこの原理を適用することを考える．さらに，歪曲率（ベルトラミ微分）の p 乗可積分性と微分オーダーαの間の関係に着目する．ここに p 乗可積分ヴェイユ・ピーターソン計量の解析の有用性が現れる．

４．研究成果

(1) 普遍タイヒミュラー空間に一般化されたヴェイユ・ピーターソン計量を導入するために，可積分部分空間による普遍タイヒミュラー空間のアファイン葉層構造について研究した．タイヒミュラー空間は単位円板上のベルトラミ微分の空間を使って表現されるが，p 乗可積分タイヒミュラー空間は，双曲計量に関して p 乗可積分なベルトラミ微分に制限して定義される普遍タイヒミュラー空間の部分空間（正則な埋め込み）である．一方，タイヒミュラー空間はベアス埋め込みにより，単位円板上の正則２次微分のなすバナッハ空間の領域と同一視される．p 乗可積分タイヒミュラー空間に対しては， p 乗可積分な正則２次微分形式からなるバナッハ空間を考える．ベルトラミ微分の空間と正則２次微分の空間の商分解がベアス埋め込みにより対応することをみて，普遍タイヒミュラー空間のアファイン葉層構造を証明した．このアファイン葉層構造を基にして，２乗可積分な場合は Cui, Takhtajan-Teo はヴェイユ・ピーターソン 計量を導入したが，それを一般化し，p 乗ヴェイユ・ピーターソン計量を普遍タイヒミュラー空間に与えた．また，タイヒミュラー距離との関係，ベルトラミ微分の可積分ノルムによるヴェイユ・ピーターソン距離の評価などの基本的性質を証明した．

(2) ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間に，ベアス埋め込みを用いて複素構造を導入した．また，ベルトラミ微分のノルムから誘導される位相と微分同相写像のノルムから誘導される位相が同値であることを示した．その結果として，このタイヒミュラー空間は群構造に関して位相群となることが証明できた．ベルトラミ微分のノルムは双曲計量の重みをつけた上限ノルムを与え，そのような歪曲係数をもつ単位円板の擬等角同相写像の境界拡張が円周の微分同相写像となり，その１階微分までのヘルダーノルムが評価できることを証明した．逆向きの評価としては，このような微分同相写像の等角重心拡張の歪曲係数を評価する方法が進展した． Earle による微分同相写像の等角重心拡張に関する方法の改良から，等角重心拡張により定義されるタイヒミュラー空間からベルトラミ微分の空間への写像（タイヒミュラー射影の切断）の連続性が証明された．結果としてこのタイヒミュラー空間が可縮であることもわかった．

(3) 普遍タイヒミュラー空間のいくつかの部分空間について，剰余類分解がベアス埋め込みにより，線形部分空間によるアファイン葉層化と完全に対応することを証明した．この結果は，対称写像からなる部分空間については既に知られている重要な結果であり，漸近的タイヒミュラー空間のベアス埋め込みの単射性を保証するものである．本研究では，一般に p 乗可積分タイヒミュラー空間に対しても上記のベアス埋め込みでの対応関係（商ベアス埋め込みの単射性）を証明した．また，任意の指数のヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像からなる部分空間に対しても同様の結果を得た．

(4) 対称写像による微分同相写像群の共役に関する剛性定理を定式化し，微分同相写像によるメビウス変換群への共役が存在するための条件について考察した．剛性定理のもうひとつの応用として，フックス群の微分同相写像群のなかでの変形空間によい構造を与える問題についても取り組んだ．そのためにまず，対称写像のなかでの変形空間に，円周上の群不変対称構造のタイヒミュラー空間としての複素構造を与え，擬等角タイヒミュラー空間論の枠組みでの基礎理論を整備した．微分同相写像群のなかでの変形空間をこのタイヒミュラー空間に埋め込むために，上記のベアス埋め込みが双方の剰余類の構造を保つという結果を応用した．微分同相写像群のクラスとしては，これまでヘルダー連続微分をもつものを扱っていたが，高階の滑らかさをもつ写像に関しても一次元力学系理論を用いて拡張で

きることを示した．剛性定理における微分可能性度の昇級について，これまでの複素解析的証明はこれで置き換えることが可能になった．

(5) 普遍タイヒミュラー空間を円周上の擬対称写像群の空間とみなせば，その部分群から各種の普遍タイヒミュラー空間の部分空間が定義できる．これらをフックス群の作用に関して不変な空間として定義する場合には，擬対称写像を単位円板の擬等角写像に拡張し，双曲リーマン面上でその歪曲係数（ベルトラミ微分）の特徴付けを考える必要がある．双曲リーマン面上の可積分なベルトラミ微分がつくるタイヒミュラー空間とその上のヴェイユ・ピーターソン計量ついては柳下による先行の研究成果がある．可積分性に変えて，減衰オーダーを指定したベルトラミ微分からなるタイヒミュラー空間の複素構造とそのタイヒミュラー空間上の基点変換で不変な計量について考察した．この空間は，単位円板の場合には円周上のヘルダー連続な微分をもつ微分同相写像群のタイヒミュラー空間に相当するものである．このような普遍タイヒミュラー空間の部分空間をフックス群の作用と両立する形で構成する各種方法の一般的な比較も行った．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 16 件）

① K. Matsuzaki, Injectivity of the quotient Bers embedding of Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 44 (2019), 657-679. 査読有

② T. Sugawa, A construction of trivial Beltrami coefficients, Amer. Math. Soc. 147 (2019), 629-635. 査読有

③ K. Matsuzaki, Dynamics of Teichmüller modular groups and topology of moduli spaces of Riemann surfaces of infinite type, Groups, Geometry, and Dynamics 12 (2018), 1-64. 査読有

④ K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms, rigidity of symmetric conjugation and affine foliation of the universal Teichmüller space, Geometry, Dynamics, and Foliations 2013, 145-180, Advanced Studies in Pure Mathematics 72, Mathematical Society of Japan, 2017. 査読有

⑤ K. Matsuzaki, Continuity of the barycentric extension of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivative, Trans. London Math. Soc. 4 (2017), 129-147. 査読有

⑥ K. Matsuzaki, The Teichmüller space of group invariant symmetric structures on the circle, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 42 (2017), 535-550. 査読有

⑦ K. Matsuzaki and M. Yanagishita, Asymptotic conformality of the barycentric extension of quasiconformal maps, Filomat 31 (2017), 85-90. 査読有

⑧ M. Yanagishita, Kähलerity and negativity of Weil-Petersson metric on square integrable Teichmüller space, J. Geom. Anal. 27 (2017), 1995-2017. 査読有

⑨ E. Fujikawa and M. Taniguchi, The Teichmüller space of a countable set of points on a Riemann surface, Conform. Geom. Dyn. 21 (2017), 64-77. 査読有

⑩ G. Nakamura and T. Nakanishi, Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions and action of mapping class groups, Conform. Geom. Dyn. 20 (2016), 25-42. 査読有

⑪ K. Matsuzaki, Uniform convexity, normal structure and the fixed point property of metric spaces, Topology Appl. 196 (2015), 684-695. 査読有

⑫ K. Matsuzaki, The universal Teichmüller space and diffeomorphisms of the circle with Hölder continuous derivatives, Handbook of group actions. Vol. I, 333-372, Adv. Lect. Math. (ALM), 31, Int. Press, Somerville, MA, 2015. 査読有

⑬ K. Matsuzaki, Certain integrability of quasisymmetric automorphisms of the circle, Comput. Methods Funct. Theory 14 (2014), 487-503. 査読有

⑭ D. Partyka and K. Sakan, Heinz type inequalities for Poisson integrals, Comput. Methods Funct. Theory 14 (2014), 219-236. 査読有

⑮ M. Gendulphe and Y. Komori, Polyhedral realization of a Thurston compactification, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 23 (2014), 95-114. 査読有

⑯ V. Gutlyanski, K. Sakan and T. Sugawa, On μ-conformal homeomorphisms and boundary correspondence, Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), 947-962. 査読有

〔学会発表〕（計 16 件）

① 松崎克彦，普遍タイヒミュラー空間と群不変タイヒミュラー空間，リーマン面・不連続群論研究集会，2019 年 2 月 9 日

② K. Matsuzaki, A moduli space of a Riemann surface of infinite topological type, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 国立台湾大学，2018 年 7 月 8 日

③ 松崎克彦, Rigidity of certain groups of circle homeomorphisms and Teichmueller spaces, 東大数理・複素解析幾何セミナー，2018 年 7 月 2 日

④ K. Matsuzaki, Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces, Conference of Complex Analysis in China, 曲阜師範大学, 2017 年 9 月 24 日
⑤ 松崎克彦，円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間，日本数学会年会函数論分科会特別講演，首都大学東京，2017 年 3 月 24 日
⑥ 松崎克彦，あたらしいタイヒミュラー空間をつくる，第 51 回函数論サマーセミナー，山梨英和大学（ホテル石風），2016 年 9 月 2 日
⑦ 松崎克彦，ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像の位相群と等角重心拡張，複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺，京都教育大学，2015 年 12 月 13 日
⑧ 松崎克彦，ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像の等角重心拡張の連続性，日本数学会秋季総合分科会，京都産業大学，2015 年 9 月 14 日
⑨ K. Matsuzaki, The barycentric extension of circle diffeomorphisms，リーマン面・不連続群研究集会，大阪大学, 2015 年 2 月 16 日
⑩ 松崎克彦，The universal Teichmueller space and diffeomorphisms of the circle with Hoelder continuous derivatives，複素力学系の総合的研究，京都大学数理解析研究所，2014 年 12 月 8-9 日
⑪ 松崎克彦，円周の微分同相写像の等角重心拡張について，ポテンシャル論研究集会，福山大学，2014 年 9 月 4 日
⑫ K. Matsuzaki, A certain circle diffeomorphism with Hoelder continuous derivative, 22nd ICFIDCAA，東国大学，2014 年 8 月 9 日
⑬ K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms and Banach structures on the universal Teichmueller space, Rigidity School，東京大学，2014 年 1 月 6 日-10 日
⑭ 松崎克彦，普遍タイヒミュラー空間の線形化：剛性と固定点問題，リーマン面に関連する位相幾何学，東京大学，2013 年 8 月 26 日
⑮ K. Matsuzaki, Integrability of quasisymmetric quotients, 21th ICFIDCAA，南京大学，2013 年 6 月 17 日
⑯ 松崎克彦，ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間，複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺，龍谷大学，2013 年 6 月 9 日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.f.waseda.jp/matsuzak/recentpapers.html

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：須川敏幸

ローマ字氏名：SUGAWA, Toshiyuki

所属研究機関名：東北大学

部局名：大学院情報科学研究科

職名：教授
研究者番号（8 桁）：30235858

研究分担者氏名：佐官謙一

ローマ字氏名：SAKAN, Ken-ichi

所属研究機関名：大阪市立大学

部局名：大学院理学研究科

職名：特任教授
研究者番号（8 桁）：70110856

研究分担者氏名：中西敏浩

ローマ字氏名：NAKANISHI, Toshihiro
所属研究機関名：島根大学
部局名：学術研究院理工学系
職名：教授
研究者番号（8 桁）：00172354

研究分担者氏名：小森洋平
ローマ字氏名：KOMORI, Yohei
所属研究機関名：早稲田大学
部局名：教育・総合科学学術院
職名：教授
研究者番号（8 桁）：70264794

研究分担者氏名：谷口雅彦
ローマ字氏名：TANIGUCHI, Masahiko
所属研究機関名：奈良女子大学
部局名：自然科学系
職名：教授
研究者番号（8 桁）：50108974

(2)研究協力者

研究協力者氏名：柳下剛広
ローマ字氏名：YANAGISHITA，Masahiro