

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 6 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287022

研究課題名(和文)非線形分散型波動方程式の特異性の幾何学的構造と大域可解性の研究

研究課題名(英文)An investigation of symmetries in the geometric structure and existence of global solutions to nonlinear dispersive wave equations

研究代表者

高岡 秀夫 (Takaoka, Hideo)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：10322794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円

研究成果の概要(和文)：分散性と非線形相互作用とが混在する非線形波動現象を記述する非線形シュレディンガー方程式を中心に、初期値問題の適切性と解の大域的な性質を研究した。フーリエ空間において解を展開し、非線形共鳴と非共鳴の分類から解の非一様な特異性を特徴付けた。空間微分を非線形項に含む非線形シュレディンガー方程式と、単位球面上に空間変数を制限した非線形シュレディンガー方程式に対しては、広範囲な関数クラスで解を示した。また、解の波数エネルギーが転換される現象を示した。研究過程で、非線形相互作用の下で異なる波数の時間発展を制御する方法を考察した。

研究成果の概要(英文)：In this study, I have developed the local and global well-posedness for the initial value problem related to the nonlinear Schrodinger equations in which dispersion effect and nonlinear interaction effect are incorporating. Using the Fourier analysis, I separated the solution into two parts; non-resonant and resonant oscillation parts, which have different in nature and distinguish nonuniformity part of solutions. For the nonlinear Schrodinger equations both with derivative in nonlinearities and on a sphere domain, I improved the local well-posedness for large function spaces. Moreover, I showed that there exists exchange of energy between Fourier modes. In the research process, I observed the estimation of energy exchange between different Fourier modes, due to the contribution in the nonlinear interaction.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：分散型方程式 適切性 非線形波動

1. 研究開始当初の背景

KdV 方程式や非線形シュレディンガー方程式は非線形分散型方程式の典型例であり、振動数と波数の違いによって伝播速度が異なる分散性と非線形共鳴を起因とする集約性とが共存する混在現象を記述する。このような状況の下、非線形分散型方程式の解の局所的・大域的な構造を解析する上で、近年では関数解析的手法、及び調和解析的手法、それらを統合することが有力な研究方法となっている。特に、1990年代の Bourgain, Kenig, Ponce, Vega, 諸氏によるフーリエ制限法による一連の研究は、初期値問題の適切性に対して飛躍的な発展をもたらした。一方で、ギブス測度に基づいた統計力学の側面から解の軌道を考察したり、波動のエネルギーがどのような過程で転換されるかを考察したりすると云った、解の定性的な性質を研究する上で、分散性と非線形共鳴による解の非一様な特異性をより厳密に解析する理論の構築が必要となる。このような流れの中で、調和解析的手法による厳密な解析手段を取り込み、分散型方程式の初期値問題に対する適切性と非適切性とを切り分ける臨界的な状況を考察することは重要な研究である。

2. 研究の目的

非線形シュレディンガー方程式を非線形分散型方程式のプロトタイプとして、解の非一様な特異性の伝搬を解析する方法を開発する。

最終的には、初期値問題の適切性・非適切性を切り分ける関数空間の決定、および、大域的適切性が成り立つ場合にはその上での解の大域構造を解明することである。特に、既存の成果を基礎にフーリエ空間、および、時空間座標における解の特異性に関する性質を、エネルギー制御をキーワードとして非線形分散型方程式の局所的・大域的適切性を統一的に理解することを目指す。

この研究期間においては、非線形シュレディンガー方程式に対して、分散性と非線形性の混在が解の存在証明にどのように起因するか、可解性の問題を方程式の保存則や非線形評価式に対するスケール不変な関数空間で実現されるか、その解明を目指す。

3. 研究の方法

調和解析的手法による精密な考察、方程式の保存則をはじめとした方程式の幾何学的対称性、非線形共鳴と非共鳴の違いによる特徴づけから、分散性と非線形性との混在を解析し、解の非一様な特異性を解明する。非線形効果から誘起される波束の変調構造を考察することによって、従来に得られていた方程式の適切性の問題を見直し、さらにこれまでの研究の方法に調和解析的な解析を統合する形で、適切性が成り立つ臨界的な関数空間を捉えることを試みる。

非線形共鳴と非共鳴とに解を分解して、その違いで解の非一様性を考察する。これらの性質については、エネルギー分布の時間発展を解析する方法をとる。ストリッカーツ型評価式と調和解析的手法とを融合させることによって、厳密な解析方法をとる。

4. 研究成果

(1) 非線形相互作用効果として、空間微分を非線形項にもつ空間1次元の非線形シュレディンガー方程式に対して、方程式のハミルトン形式から誘導される不変測度が定まるソボレフ指数に含まれる関数空間で解の存在定理を示した。フーリエ空間において、非線形共鳴現象を起因とする発散成分を抽出し、それを有限次元モデルで特徴付けた。このモデルに対して不変測度のよる一様評価が可能となり、非線形シュレディンガー方程式との誤差評価により解の大域評価式を構成することが可能となった。

(2) 単位球面上に空間座標の領域を制限した, べき乗型の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式に対して, 方程式のハミルトニアンに適合した臨界型ソボレフ指数を求め, その指数を伴うベゾフ型の関数空間において解の存在定理が成り立つことを得た. 力学系分野における方程式の与えるギブス測度を考えた正規分布のデータなどはその指数より低い滑らかさを持つので, そのような解のクラスを考えることは有効な研究といえる. 滑らかさが弱い関数空間において, 非線形相互作用による特異性をうまく統御することが問題であるが, 非線形相互作用のメカニズムの解析はエネルギー法を用い, 特異性を考察する解析は非線形項の振動形態を共鳴する解の波長を制御する方法をとった.

(3) 微分による移送項を非線形項にもつ非線形シュレディンガー方程式に対して, 偏微分方程式論の見地から, 時間大域解に対する波数間エネルギー転換現象を調べた. 非線形相互作用によって引き起こされる解の特異性をフーリエ解析による手法で特徴付け, 関数解析学の手法からそれを共鳴場に対する有限次元近似モデル方程式との比較として捉えて, エネルギー転換現象を数学的に記述した.

(4) 空間1次元で5次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式に対し, 周期の大きさをパラメータとして, マスエネルギーの転換に観点を置いて非線形相互作用による解のダイナミクスを研究し, 方程式を近似する有限次元モデルの導出, およびその方程式から得られる特殊解の性質を研究することによって, 解のエネルギー転換現象を解析した. 有限次元モデルと本来の解との誤差評価に関して, エネルギー法を用いた評価式を得た. 方程式をフーリエ成分で書き下し, 非

線形相互作用の特異性に寄与する非線形共鳴成分をうまく抽出することにより, 周期のパラメータを用いて, エネルギー転換を示す指数のオーダーを与えた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. Takaoka, H., A priori estimates and weak solutions for the derivative nonlinear Schrodinger equation on torus below $H^{1/2}$, J. Differential Equations, 260 (2016), 818--859.
2. Takaoka, H., Local well-posedness of the nonlinear Schrodinger equations on the sphere for data in modulation spaces, Communications in Partial Differential Equations, 41 (2016), 732--747.
3. Takaoka, H., Energy transfer model for the derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus, Discrete Contin. Dyn. Syst., 37 (2017), no. 11, 5819--5841.

[学会発表](計 17 件)

1. Takaoka, H., Almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS, 2013年8月, 9th International ISAAC Congress, Pedagogical University.
2. Takaoka, H., Energy estimates and well-posedness for the cubic nonlinear Schrodinger equations in dimensions 1 and 2, 2013年10月, 応用解析研究会, 早稲田大学.
3. Takaoka, H., Sharp well-posedness for the cubic nonlinear Schrodinger equation on S^2 , Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations, 2014年9

月, 大阪大学.

4. Takaoka, H., Well-posedness for the cubic NLS on surface S^2 , The 10th HU and SNU Symposium on mathematics, 2014年11月, 北海道大学.

5. Takaoka, H., Well-posedness for the cubic NLS on surface on S^2 , The 23rd Annual Workshop of Differential Equation, 2015年1月, National Taitung University.

6. Takaoka, H., 非線形分散型方程式に対する不変測度の構成と初期値問題の大域可解性, Saga Workshop on PDE, 2015年3月, 佐賀大学.

7. Takaoka, H., Energy transfer model for the derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus, Workshop on Analysis in Kagurazaka 2016, 2016年1月, 東京理科大学.

8. Takaoka, H., On the resonance energy transfer for some nonlinear Schrodinger equation on the torus, 偏微分方程式論セミナー, 2017年1月, 北海道大学.

9. Takaoka, H., Energy transfer for the resonant derivative nonlinear Schrodinger equation on the torus, The 34th Kyushu Symposium on Partial Differential equations, 2017年1月, 九州大学.

10. Takaoka, H., 非線形シュレディンガー方程式に対する共鳴現象と解のダイナミクス, 談話会, 2017年4月, 神戸大学.

11. Takaoka, H., Energy transfer for the resonant 1D quintic NLS with large periodic boundary condition, 解析セミナー, 2017年4月, 神戸大学.

12. Takaoka, H., Energy transfer model for the resonant nonlinear Schrodinger equations, Workshop on linear and nonlinear dispersive equations and related topics, Kansai Seminar House, 2017年5月, 京都大学.

13. Takaoka, H., Energy transfer model and large periodic boundary value problem for the quintic NLS, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, Kyoto University, 2017年8月, 京都大学.

14. Takaoka, H., Energy transfer model and large periodic boundary value problem for the quintic NLS, Okayama Workshop on Partial Differential Equations, Okayama University, 2017年10月, 岡山大学.

15. Takaoka, H., Energy transfer model and large periodic boundary value problem for the quintic NLS, The 15th Linear and Nonlinear Waves, Piazza Omi, 2017年11月, 大阪大学.

16. Takaoka, H., 非線形シュレディンガー方程式の非線形共鳴とエネルギー転移構造, 第4回量子渦と非線形波動, 2018年1月, 東京理科大学.

17. Takaoka, H., Energy transfer model for the resonant 1D quintic NLS, 2018年3月, IRTG Workshop 2018, Seoul National University.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/takaoka/index.htm>

6. 研究組織

(1)研究代表者

高岡 秀夫 (TAKAOKA, Hideo)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 10322794

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

1. 久保 英夫 (KUBO, Hideo)

(北海道大学・大学院理学研究院・教授)

研究者番号： 50283346

2. 中西 賢次 (NAKANISHI, Kenji)

(京都大学・数理解析研究所・教授)

研究者番号： 40322200

3. 津川 光太郎 (TSUGAWA, Kotaro)

(中央大学・大学院理工学研究科・教授)

研究者番号： 70402451

(4)研究協力者

なし