

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 18 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25287027

研究課題名(和文) グラフの再埋蔵を中心とした位相幾何学的グラフ理論の総合的研究

研究課題名(英文) Synthetic research on topological graph theory centered around re-embeddings of graphs

研究代表者

根上 生也 (NEGAMI, Seiya)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：40164652

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,600,000円

研究成果の概要(和文)：位相幾何学的グラフ理論における多くの研究テーマを「グラフの再埋蔵」という視点で束ねて総合的な研究を行った。特に、閉曲面上の三角形分割の再埋蔵構造を記述する「パネル構造」の理論を展開し、コンピュータ上のプログラムとして実装して、トーラス上の三角形分割に対する既存の結果を再検証した。閉曲面上に埋め込まれたグラフの対称性を破壊するような彩色や三角形分割に対する triad coloring という新しい彩色を考察し、その諸性質を解明した。

研究成果の概要(英文)： We carried out synthetic research on topological graph theory, binding many subjects with a viewpoint of “re-embedding of graphs”. Especially, we developed a theory called “panel structures” to describe the re-embedding structures of triangulations on closed surface, implemented the theory as a computer program and re-verified a known-result on the torus, using it. We investigated many properties of asymmetric colorings of graphs embedded on closed surfaces and those of a new devised coloring called “triad-colorings” of triangulations on closed surfaces.

研究分野：位相幾何学的グラフ理論

キーワード：離散数学 位相幾何学的グラフ理論 グラフの再埋蔵 閉曲面の三角形分割 トポロジー 平面被覆予想 識別彩色

1. 研究開始当初の背景

1980年代に研究代表者である根上は、トポロジーと離散数学の手法を融合し、グラフの閉曲面や空間への埋め込みを探索する位相幾何学的グラフ理論と呼ばれる分野を拓き、平成元年から「位相幾何学的グラフ理論研究集会」を開催して、この分野に関わる研究者を増やしていった。その活動の中で、平面被覆予想、三角形分割の対角変形、地図の識別染色数など、多くの研究テーマが創出されたが、その多くは「グラフの再埋蔵」という視点で束ねることができる。そこで、この視点からこれまで行われてきた研究を総括して、位相幾何学的グラフ理論全体を大きな体系として見直すことが期待されていた。

2. 研究の目的

グラフの再埋蔵構造の理論を構築するという大きな目標のもとで、以下のテーマを探索する。

閉曲面上の三角形分割の再埋蔵構造を記述するパネル構造を、コンピュータを用いて自動生成する。

閉曲面上のグラフの対称性を破壊するように彩色するために必要な色数の最小値(識別染色数)を評価する。

位相幾何学的グラフ理論における未解決難問として有名な「平面被覆予想」の周辺を探索する。

格子点描画を利用した四色定理の再証明を試みる。

3. 研究の方法

平成25年度に「位相幾何学グラフ理論研究集会」は開始から四半世紀を迎えることになる。それを記念する国際会議「TGT30」の開催を皮切りに、国内外の研究會に参加し、多くの分野の研究者と密に討議・情報交換を行う。また、定期的に「TGTセミナー」を開催し、研究成果の検討や若手の育成に努める。さらに、情報系の大学院生の指導を通じて、コンピュータ・プログラミングのスキルを蓄積し、三角形分割のパネル構造の自動生成システムを開発する。

4. 研究成果

上記については、トーラスの三角形分割のパネル構造に関する既知の結果を、コンピュータ・プログラムを用いて再検証した。さらに、今後の研究に役立つように、再埋蔵対のパネル構造の理論を展開し、トーラスに対してそれを自動生成するプログラムを実装した。

については、3-正則地図は、3つの例外を除いて、色4を高々1回だけ使う識別彩色を持つこと、切頂3-正則グラフの識別染色数は3以下であること、有限個の例外を除き、多面体的二部地図の識別染色数は3以下であることを証明した。

については、平面被覆予想を解決する上

で懸案となっている $K_{1,2,2,2}$ の平面的被覆の存在を段階的に決定していく手法を考案した。

については、四色定理の再証明には至らなかったが、四色定理を用いて、平面的グラフが埋め込みとなる格子点描画を持つことを証明した。また、四色定理と関連して、閉曲面上の三角形分割に対する triad coloring と呼ばれる新しい彩色を考案し、代数的トポロジーにおける被覆空間の理論を応用して、球面、射影平面上の三角形分割がいつ triad coloring を持つかを決定した。

さらに、連携研究者や海外の研究者の協力により、位相幾何学的グラフ理論における様々な現象を解明し、以下に示すような多くの論文や研究集会における発表としてその研究成果を公開した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計23件)

1. Atsuhiko Nakamoto, Seiya Negami, Kyoji Oba, Yusuke Suzuki, Looseness and independence number of triangulations on closed surfaces. *Discuss. Math. Graph Theory* 36 (2016), no. 3, 545-554. 査読有
2. Seiya Negami, Faithful embeddings of planar graphs on orientable closed surfaces. *Symmetries in graphs, maps, and polytopes*, 249-262, Springer Proc. Math. Stat., 159, Springer, [Cham], 2016. 査読有
3. Michiko Kasai, Naoki Matsumoto, Atsuhiko Nakamoto, Grünbaum colorings of triangulations on the projective plane. *Discrete Appl. Math.* 215 (2016), 155-163. 査読有
4. Atsuhiko Nakamoto, Takayuki Nozawa, Book embedding of locally planar graphs on orientable surfaces. *Discrete Math.* 339 (2016), no. 11, 2672-2679. 査読有
5. Naoki Matsumoto, Atsuhiko Nakamoto, Shin-ichi Yonekura, Minor relation for quadrangulations on the projective plane. *Discrete Appl. Math.* 209 (2016), 296-302. 査読有
6. Atsuhiko Nakamoto, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki, Cyclic 4-colorings of graphs on surfaces. *J. Graph Theory* 82 (2016), no. 3, 265-278. 査読有
7. Gašper Fijavž, Atsuhiko Nakamoto, Odd complete minors in even embeddings on surfaces. *Discrete Math.* 339 (2016), no. 1, 165-178. 査読有
8. Gašper Fijavž, Seiya Negami, Terukazu Sano, Distinguishing colorings of

- 3-connected planar graphs with five colors. *Yokohama Math. J.* 61 (2015), 57-65. 査読有
9. Seiya Negami, 3-regular maps on closed surfaces are nearly distinguishing 3-colorable with few exceptions. *Graphs Combin.* 31 (2015), no. 6, 1929-1940. 査読有
 10. Atsuhiko Nakamoto, Takayuki Nozawa, Book embedding of projective-planar graphs. *Congr. Numer.* 225 (2015), 63-71. 査読有
 11. Sheng Bau, Naoki Matsumoto, Atsuhiko Nakamoto, Lijuan Zheng, Minor relations for quadrangulations on the sphere. *Graphs Combin.* 31 (2015), no. 6, 2029-2036. 査読有
 12. Yuki Kawasaki, Naoki Matsumoto, Atsuhiko Nakamoto, N-flips in 4-connected even triangulations on the sphere. *Graphs Combin.* 31 (2015), no. 6, 1889-1904. 査読有
 13. Atsuhiko Nakamoto, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki, Extension to even triangulations. *SIAM J. Discrete Math.* 29 (2015), no. 4, 2075-2087. 査読有
 14. Naoki Matsumoto, Atsuhiko Nakamoto, Generating 4-connected even triangulations on the sphere. *Discrete Math.* 338 (2015), no. 1, 64-70. 査読有
 15. Jun Fujisawa, Katsuhiko Ota, Edge proximity conditions for extendability in planar triangulations. *J. Graph Theory* 80 (2015), no. 1, 1-11. 査読有
 16. Momoko Nagashima, Atsuhiko Nakamoto, Seiya Negami, Yusuke Suzuki, Generating 3-connected quadrangulations on surfaces. *Ars Combin.* 116 (2014), 371-384. 査読有
 17. Raiji Mukae, Atsuhiko Nakamoto, Yusuke Suzuki, 3-polychromatic quadrangulations on surfaces. *Congr. Numer.* 219 (2014), 43-51. 査読有
 18. Sho Kato, Ryuichi Mori, Atsuhiko Nakamoto, Quadrangulations on 3-colored point sets with Steiner points and their winding numbers. *Graphs Combin.* 30 (2014), no. 5, 1193-1205. 査読有
 19. Alexandre Boulch, Éric Colin de Verdière, Atsuhiko Nakamoto, Irreducible triangulations of surfaces with boundary. *Graphs Combin.* 29 (2013), no. 6, 1675-1688. 査読有
 20. Momoko Kobayashi, Atsuhiko Nakamoto, Tsubasa Yamaguchi, Polychromatic 4-coloring of cubic even embeddings on the projective plane. *Discrete Math.* 313 (2013), no. 21, 2423-2431. 査読有
 21. Atsuhiko Nakamoto, Shoichi Tsuchiya, HISTs of triangulations on surfaces. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 10 (2013), no. 1, 1-14. 査読有
 22. Jun Fujisawa, Atsuhiko Nakamoto, Kenta Ozeki, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with a partite set of degree four vertices. *J. Combin. Theory Ser. B* 103 (2013), no. 1, 46-60. 査読有
 23. Iwao Sato, Seiken Saito, A generalized Bartholdi zeta function for a regular covering of a bipartite graph. *Linear Algebra Appl.* 438 (2013), no. 3, 1025-1056. 査読有
- [学会発表](計 44 件)
1. 根上生也, 位相幾何学的グラフ理論の作法—平面被覆予想の解決を目指して, 第 28 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2016/11/12, 岩崎学園情報科学専門学校(横浜市)
 2. 佐藤 巖, A generalized Bartholdi zeta function of a graph, 第 28 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2016/11/12, 岩崎学園情報科学専門学校(横浜市)
 3. 中本敦浩, 正偶角形のひし形分解と射影平面の四角形分割, 第 28 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2016/11/12, 岩崎学園情報科学専門学校(横浜市)
 4. 鈴木有祐, 3-染色的三角形分割に対する変形操作について, 第 28 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2016/11/11, 岩崎学園情報科学専門学校(横浜市)
 5. 根上生也, 不定形三角定規による作図可能性, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016/8/20, 高城コミュニティセンター(宮城県・高城町)
 6. 中本敦浩, 濱中裕明, 鈴木有祐, 東京オリンピック, ひし形分解, 四角形分割, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016/8/20, 高城コミュニティセンター(宮城県・高城町)
 7. 野口健太, 長澤 拓, 鈴木有祐, 最適 1-平面グラフの他の閉曲面への埋め込み, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016/8/20, 高城コミュニティセンター(宮城県・高城町)
 8. 鈴木有祐, 村井 聡, 3-染色的三角形分割に対する変形操作について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016/8/20, 高城コミュニティセンター(宮城県・高城町)
 9. 佐藤 巖, 三橋秀生, 森田英章, A matrix-weighted zeta function of a graph, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016/8/20, 高城コミュニティセンター(宮城県・高城町)
 10. Seiya Negami, Faithful embeddings of

- graphs on closed surfaces, Symmetries and Covers of Discrete Object 2016, 2016/2/15-19, クイーンズタウン(ニュージーランド)
11. 佐藤 巖, 2次元単体的複体のゼータ関数, 第27回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2015/11/14, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 12. 鈴木有祐, 最適1-交差埋め込みの K_7 -マイナーについて, 2015/11/14, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 13. 中本敦浩, 3-正則2部グラフのsplitter theoremに向けて, 2015/11/14, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 14. 根上生也, トポロジー的手法を用いたn-triad coloringの解析, 第27回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2015/11/13, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 15. 根上生也, Beans functions of graphs with small beans, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015/8/23, 熊本大学工学部・百周年記念館
 16. 鈴木有祐, K_7 -Minors in optimal 1-planar graphs, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015/8/23, 熊本大学工学部・百周年記念館
 17. 佐藤 巖, 三橋秀生, 森田 英章, A new determinant expression for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015/8/23, 熊本大学工学部・百周年記念館
 18. 太田克弘, Vertex-disjoint isomorphic s-chorded cycles in a graph, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015/8/22, 熊本大学工学部・百周年記念館
 19. 中本敦浩, Odd minors in even embeddings on surfaces, 第26回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2014/11/8, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 20. 佐藤 巖, Quantum graph walk, 第26回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2014/11/8, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 21. 根上生也, 平面グラフの向き付け不可能な閉曲面上の忠実な埋め込み, 第26回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2014/11/7, 横浜国立大学・みなとみらいキャンパス
 22. 佐藤 巖, The weighted complexity of the line digraph of a digraph, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014/8/22, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟市)
 23. 根上生也, 平面的グラフの他の閉曲面への忠実な埋め込み, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014/8/21, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟市)
 24. 野澤孝之, 中本敦浩, 小関健太, 閉曲面上のグラフのページ数について, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014/8/21, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟市)
 25. 野口健太, 中本敦浩, 小関健太, トーラスの偶三角形分割が二部的全域四角形分割を持つための必要十分条件, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014/8/21, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟市)
 26. 中本敦浩, Gašper Fijavž, Odd complete minors in even embeddings on surfaces, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014/8/20, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟市)
 27. Seiya Negami, Faithful embedding of planar graphs on other surfaces, 5th Workshop SIGMAP - Symmetry In Graphs, Maps And Polytopes, 2014/7/7-11, ウェストモルバーン(英国)
 28. Seiya Negami, Distinguishing chromatic numbers of 3-regular maps on closed surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics 2014, MS18 Variations within Chromatic Graph Theory, 2014/6/16-19, ミネアポリス(米国)
 29. Atsuhiko Nakamoto, Coloring maps on closed surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics 2014, MS18 Variations within Chromatic Graph Theory, 2014/6/16-19, ミネアポリス(米国)
 30. Seiya Negami, Distinguishing chromatic numbers of 3-regular maps on closed surfaces, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics 2014, 2014/5/17-21, 日本大学・文理学部キャンパスリス
 31. Seiya Negami, Distinguishing coloring of 3-regular graphs on surfaces, 2014 Joint Mathematics Meeting, 2014/1/15-18, ポルチモア(米国)
 32. Yusuke Suzuki, Cube-contractions in 3-connected quadrangulations, 25th Workshop on Topological Graph Theory, 2013/11/21, 横浜国立大学・教育文化ホール
 33. Iwao Sato, A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph, 25th Workshop on Topological Graph Theory, 2013/11/20, 横浜国立大学・教育文化ホール
 34. Seiya Negami, Distinguishing chromatic number of maps on closed surfaces, 25th Workshop on Topological Graph Theory, 2013/11/20, 横浜国立大学・教育文化ホール
 35. Atsuhiko Nakamoto, Independence number and coloring of graphs on surfaces, 25th Workshop on Topological Graph

Theory, 2013/11/19, 横浜国立大学・教育文化ホール

36. Atsuhiko Nakamoto, Polychromatic coloring of graphs on surfaces, NIMS seminar in combinatorics, 2013/9/30-10/1, デジョン (韓国)
37. 太田克弘, Guantao Chen, Ronald J. Gould, 弘畑和秀, S. Shan, Disjoint chorded cycles of the same length, 離散数学とその応用研究集会 2013, 2013/8/10, 山形市保健センター (山形市)
38. 藤沢 潤, 太田克弘, Edge proximity conditions for extendability in planar triangulations, 離散数学とその応用研究集会 2013, 2013/8/10, 山形市保健センター (山形市)
39. 佐藤 巖, Bartholdi zeta function of a periodic simple graph, 離散数学とその応用研究集会 2013, 2013/8/10, 山形市保健センター (山形市)
40. 鈴木有祐, Cube-contractions in 3-connected quadrangulations, 離散数学とその応用研究集会 2013, 2013/8/10, 山形市保健センター (山形市)
41. 根上生也, 位相幾何学的グラフ理論における代数的問, 離散数学とその応用研究集会 2013, 2013/8/9, 山形市保健センター (山形市)
42. Seiya Negami, Bipartite planar coverings and even embeddings of graphs on the projective plane, Graph Embeddings and Maps on Surfaces 2013, 2013/7/15-19, スモレニツェ (スロバキア)
43. Atsuhiko Nakamoto, Grünbaum coloring of Eulerian triangulations on surfaces, Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, 2013/7/7-13, コシツェ (スロバキア)
44. Atsuhiko Nakamoto, Generating Eulerian triangulations on surfaces, Geometrical and Topological Graph Theory, 2013/4/15/-19, プリストル (英国)

〔その他〕

1. 位相幾何学的グラフ理論研究拠点ホームページ <http://tgt.ynu.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

根上 生也 (NEGAMI, Seiya)
横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授
研究者番号: 40164652

(2) 研究分担者

中本 敦浩 (NAKAMOTO, Atsuhiko)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号: 20314445

山本 光 (YAMAMOTO, Ko)

横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号: 00293168

(3) 連携研究者

太田 克弘 (OTA, Katsuhiko)
慶応義塾大学・理工・教授
研究者番号: 40213722

佐藤 巖 (SATO, Iwao)
小山工業高等専門学校・一般科目・教授
研究者番号: 70154036

鈴木 有祐 (SUZUKI, Yusuke)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 10390402