

平成 30 年 6 月 22 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287031

研究課題名(和文) 極値組合せ論、その代数・確率手法

研究課題名(英文) Extremal combinatorics: algebraic and probabilistic methods

研究代表者

徳重 典英 (TOKUSHIGE, Norihide)

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：00217481

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,200,000円

研究成果の概要(和文)：本課題研究は、極値集合論におけるいくつかの問題について、組合せ論的な手法のみならず、代数的な手法および確率論的な手法も用いて研究した。代表的な成果を二つあげる。一つ目は、互いに交差する二つの集合族の測度の積の最大値を評価するために、半正定値計画法を用いる手法(代数的な手法)を導入した。二つ目は、AhlswedeとKhachatrianの結果を互いに交差する二つの集合族に拡張するため、ランダムウォークを用いる手法(確率論的な手法)を導入した。どちらの場合にも最善の評価を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied some problems in extremal set theory by using algebraic and probabilistic methods as well as combinatorial methods. Among other results we obtained the following two major results. One is the use of semidefinite programming to solve a problem of cross intersecting families, and the other is the use of the random walk method to extend the Ahlswede-Khachatrian Theorem to cross intersecting families. In both cases we obtained sharp results.

研究分野：組合せ論

キーワード：組合せ論 極値組合せ論 ハイパーグラフ 極値集合論 交差族 半正定値計画

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、研究開始時までに組合せ論、特に極値集合論に関する研究を主に組合せ論的な手法で研究してきたが、代数的手法、確率論的手法を取り入れる準備も行って、それらを具体的な問題に適用する段階にあった。また複数の共同研究者たちと問題に応じて共同研究を行える態勢も整っていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、第一に組合せ論における極値的な離散構造を明らかにすることであり、第二にそのために必要となる代数的、および確率論的な証明手法を開発、発展させることであった。対象とする問題群は、組合せ論(離散数学)に分類されるもののうち、特に極値集合論(ハイパーグラフの理論)に属するものを主に扱った。

3. 研究の方法

交差族の最大測度に関する問題等について、組合せ論的な手法だけでなく、代数的な手法、確率論的な手法を用いて研究をおこなった。また問題によっては幾何学的な視点も取り入れた。代数的な手法については、須田庄、田中太初との共同研究、確率論的な手法については、Peter Frankl, Sang June Lee, Mark Siggers, 幾何学的な視点からは篠原雅史、前原潤との共同研究をおこなった。次項で述べるように得られた結果については論文および研究集会において積極的に発表した。

4. 研究成果

本研究課題で得られた具体的な成果のうち、主要なものについて述べる。

- (1) 交差族の影に関する Katona の定理の q 類似を与え、それを有限体上のベクトル空間の交差空間族のサイズ評価に応用した。証明には包含行列のランクを評価するという代数的手法が用いられている。(Peter Frankl との共同研究、論文番号(14)発表番号(11))
- (2) 互いに t 交差する二つの集合族の最大サイズ(あるいは最大測度)の積を対応する隣接行列(を拡張したもの)の固有値を調べることで評価した。これはもともと一つの集合族の場合に知られていたが、それを二つの集合族に自然に拡張する方法を与えたものである。(論文(11),(13),発表(12),(13),(15))
- (3) グラフ着色に関するラムゼー型の問題について研究し、特に、完全グラフの二着色において各単色クリークの個数の少ない方の最大値を評価し、漸近的に最善の上界を得た。(Peter Frankl, Mitsuo Kato, Gyula O.H.Katona との共同研究、論文(12), 発表(11), (14), (17))

- (4) 高次元立方体における多重交差族について研究し、幾何学的に興味ある極値構造を見出した。(Peter Frankl, Masashi Shinohara との共同研究、論文(5),(6),発表(5),(11))
- (5) t 交差族に関する Ahlswede と Khachatryan の結果を互いに t 交差する二つの集合族に拡張する研究をおこなった。集合族の要素を平面上の walk に対応させ、それらの walks がもつ性質を利用して、集合族の測度のある条件を満たすランダムウォークの再帰確率から評価した。またこの手法を適用するための技術的な土台を整備した。ここで開発された手法により、二つの論文を出版し、最終的な結果をまとめた論文を執筆中である。(Peter Frankl, Sang June Lee, Mark Siggers との共同研究、論文(3),(10),発表(1),(2))
- (6) Fishburn, Frankl, Freed, Lagarias, Odlyzko による交差族の最大測度に関する結果を、互いに交差する二つの交差族に拡張した。証明は半正定値計画法を用いた。この結果は、今のところこれ以外の方法での証明がなく、従来 of shifting を用いる手法はうまく機能しないと考えられる。その意味で半正定値計画を用いることが本質的である。また代数的な議論だけで証明が完結せず、一部に組合せ論的な議論も組み込まれているという点も興味深い。(S.Suda, H.Hanaka と共同研究、論文(1), 発表(4),(7))。
- (7) 特殊な L-system について組合せ論的な方法と代数的な方法から研究した。扱われている L-system は田崎博之による有向実グラスマン多様体の極大対蹠集合の分類問題に端を発するものである。(Peter Frankl との共同研究、論文(7),(10))
- (8) Huang と Zhao は最小次数の大きい交差族の構造が一意に定まることを代数的な方法で示した。我々はこの結果に組合せ論的な証明を与え、また代数的な方法をベクトル空間における交差部分空間族に適用して類似の結果を得た。(Peter Frankl との共同研究、論文(2),(9),発表(3))
- (9) JCTA 50 周年の記念号の招待論文として極値集合論(特に交差族)に関して 50 ページ程度のサーベイ論文を書いた(Peter Frankl と共著、論文(4))。離散数学における線形代数手法と確率論的手法についてのトピックを扱った Matousek の Thirty-three Miniatures を翻訳した(図書(2))。Frankl と共著で極値集合論の概説書を 220 ページほど書き、AMS から出版にむけて準備中である。極値集合論や関連する代数的手法に関するサーベイをいくつか行っ

た(論文(9),発表(6),(8),(10),(16))。また今後の応用の可能性を探るため、画像処理に関する予備実験、情報収集等も行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

- (1) Sho Suda, Hajime Tanaka, Norihide Tokushige. A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures. *Mathematical Programming*, 166 (2017) 113-130. 査読有 DOI:10.1007/s10107-016-1106-3
 - (2) Peter Frankl, Norihide Tokushige. A note on Huang-Zhao theorem on intersecting families with large minimum degree, *Discrete Mathematics*, 340 (2017) 1098-1103. 査読有 DOI:10.1016/j.disc.2016.10.011
 - (3) Sang June Lee, Mark Siggers, Norihide Tokushige. Toward extending the Ahlswede-Khachatrian theorem to cross t -intersecting families. *Discrete Applied Mathematics*, 216 (2017) 627-645. 査読有 DOI:10.1016/j.dam.2016.02.015
 - (4) Peter Frankl, Norihide Tokushige. Invitation to intersection problems for finite sets. *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* 144 (2016) 157-211. 査読有 DOI:10.1016/j.jcta.2016.06.017
 - (5) Peter Frankl, Masashi Shinohara, Norihide Tokushige. Multiply union families in N^n . *European Journal of Combinatorics* 58 (2016) 66-74. 査読有 DOI:10.1016/j.ejc.2016.05.007
 - (6) Peter Frankl, Norihide Tokushige. Intersection problems in the q -ary cube. *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* 141 (2016) 90-126. 査読有 DOI:10.1016/j.jcta.2016.02.006
 - (7) Peter Frankl, Norihide Tokushige. Uniform eventown problems. *European Journal of Combinatorics* 51 (2016) 280-286. 査読有 DOI:10.1016/j.ejc.2015.05.001
 - (8) 徳重典英. 最小次数の大きい集合族、部分空間族. 第33回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 2016, 33-37. 査読無 hnozaki.jimdo.com/proceedings-symp-alg-comb/no-33/
 - (9) 徳重典英. 極値集合論における線形代数的手法. 数理解析研究所講究録 1956(RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」2015, 101-110. 査読無 www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kyuroku/contents/pdf/1956-11.pdf
- (10) Peter Frankl, Sang June Lee, Mark Siggers, Norihide Tokushige. An Erdos-Ko-Rado theorem for cross t -intersecting families. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, vol 128 (2014) 207-249. 査読有 DOI:10.1016/j.jcta.2014.08.006
 - (11) Norihide Tokushige. The eigenvalue method for cross t -intersecting families. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 38 (2013) 653-662. 査読有 DOI:10.1007/s10801-012-0419-4
 - (12) Peter Frankl, Mitsuo Kato, Gyula O.H. Katona, Norihide Tokushige. Two-colorings with many monochromatic cliques in both colors. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, vol 103 (2013) 415-427. 査読有 DOI:10.1016/j.jtcb.2013.04.002
 - (13) Norihide Tokushige. Cross t -intersecting integer sequences from weighted Erdos-Ko-Rado, *Combinatorics, Probability and Computing*, 22 (2013) 622-637. 査読有 DOI:10.1017/S0963548313000138
 - (14) Peter Frankl, Norihide Tokushige. The Katona theorem for vector spaces. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, vol 120 (2013) 1578-1589. 査読有 DOI:10.1016/j.jcta.2013.05.007
 - (15) Hiroshi Maehara. Euclidean Embeddings of finite metric spaces. *Discrete Mathematics*, 313 (2013) 2848-2856. 査読有 DOI:10.1016/j.disc.2013.08.029
 - (16) Hiroshi Maehara. Necks of regular polyhedral. *Journal of Geometry*, 104 (2013) 329-340. 査読有 DOI:10.1007/s00022-013-0165-3
- [学会発表](計 18 件)
- (1) Norihide Tokushige. The maximum product of measure of cross t -intersecting families. 64rd KPPY combinatorics workshop. Kyungpook National University. 2017/09/16 (韓国 Daegu)
 - (2) Norihide Tokushige. The maximum product of measure of cross t -intersecting families. Workshop on Extremal Combinatorics, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum 2017/05/22-26. (Sanya, China)
 - (3) 徳重典英. 最小次数の大きい集合族、部分空間族. 第33回代数的組合せ論シ

- ンポジウム. 2016/6/23 ピアザ淡海 (滋賀県大津市)
- (4) Norihide Tokushige. A semidefinite programming approach to cross-intersection problems. 2016 International Workshop on Graph Theory and Combinatorics. Ewha Womans University 2016/2/18 (Seoul, Korea)
- (5) 徳重典英. Intersection problems in the q -ary cube. 離散数学とその応用研究集会 2015. 熊本大学 2015/8/22 (熊本市)
- (6) 徳重典英. L-system について. 第1回代数的組合せ論「仙台勉強会」東北大学 2015/5/8 (仙台市)
- (7) Norihide Tokushige. A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures. The 3rd Workshop on Spectral Graph Theory and Related Topics. 広島工業大学 2015/3/14 (広島市)
- (8) 徳重典英. あっ、こんなところにも線形代数が! 自然科学研究教育センター講演会(第29回)慶應義塾大学 2014/11/7 (横浜市)
- (9) Norihide Tokushige. Intersection problems in the q -ary cube. The 5th KIAS Combinatorics Workshop. KIAS, 2014/9/27 (韓国 Seoul)
- (10) 徳重典英. 極値集合論における線形代数手法. RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」京都大学数理解析研究所 2014/7/25 (京都市)
- (11) Norihide Tokushige. Intersecting hypergraphs. Sum(m)it 240 conference. Eotvos Univertisy. 2014/7/7 (Budapest, Hungary)
- (12) Norihide Tokushige. Some recent results about cross intersecting families. SIAM conference on discrete mathematics 2014. Hyatt Regency Minneapolis 2014/6/17 (Minneapolis, アメリカ合衆国)
- (13) Norihide Tokushige. Erdos-Ko-Rado type results for cross intersecting families. Japan conference on graph theory and combinatorics. 日本大学 2014/5/17 (東京都世田谷区)
- (14) 徳重典英. どの色の単色クリークも多い二着色. 応用数学合同研究集会. 龍谷大学 2013/12/20 (滋賀県大津市)
- (15) 徳重典英. A ratio bound for bipartite graphs. 代数的グラフ理論、スペクトラルグラフ理論および周辺領域. 東北大学 2013/11/29 (仙台市)
- (16) Norihide Tokushige. Egawa's list of problems in 1989. Graph Theory Conference in honor of Yoshimi Egawa

- on the occasion of his 60th birthday. 東京理科大 2013/09/13 (東京都新宿区)
- (17) Norihide Tokushige. Two-colorings with many monochromatic cliques in both colors, and some related problems 8th Japanese-Hungarian symposium on discrete mathematics and its applications. Pannon University 2013/06/04 (Veszprem, Hungary)
- (18) 前原潤. Steinhaus の格子点問題---再遊. 第130回日本数学会九州支部例会. 琉球大学 2014/02/15 (沖縄県西原町)

〔図書〕(計3件)

- (1) ティモシー・ガワーズ他著、プリンス トン数学大全 IV.19「極値的および確率論的な組合せ論」の訳出 徳重典英 朝倉書店 2015 総ページ数 16.
- (2) イジイ・マトウシエク著、徳重典英 訳. 33の素敵な数学小景. 日本評論社 2014 総ページ数 230.
- (3) 前原潤, 桑田孝泰. 絵ときトポロジー-曲面のかたち- 共立出版 2013 総ページ数 117.

〔その他〕

ホームページ等

www.cc.u-ryukyu.ac.jp/~hide/

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
徳重典英 (TOKUSHIGE Norihide)
 琉球大学・教育学部・教授
 研究者番号: 00217481
- (2) 研究分担者 (H25年度)
前原潤 (MAEHRARA Hiroshi)
 琉球大学・その他部局・名誉教授
 研究者番号: 60044921
- (3) 連携研究者
 なし
- (4) 研究協力者
 P.Frankl, S.J.Lee, M.Kato,
 G.O.H.Katona, M.Shinohara, M.Siggers,
 S.Suda, H.Tanaka