

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 25 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25330003

研究課題名(和文) ネットワークの余力を最大化するサーバ割当アルゴリズムの開発

研究課題名(英文) Development of algorithms for the server-assignment problem to maximize available capacity of networks

研究代表者

伊藤 健洋 (ITO, TAKEHIRO)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：40431548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ネットワークにおいて回線帯域を逼迫しないようなサーバからユーザへのデータ配信方法を求める問題を、グラフにおける組合せ問題として定式化し研究した。特に、グラフ構造の観点からこのサーバ割当問題の計算困難性と容易性の解析を進め、グラフ中の閉路の個数やサーバの個数が計算可能性に与える影響を明らかにした。多くの場合、この問題は計算困難であるため、本研究課題では、動的計画法に基づく擬多項式時間アルゴリズムや固定パラメータアルゴリズムを与えた。

研究成果の概要(英文)：We modeled the following situation as a graph problem: In a network, we wish to find a way of data distributions from servers to all users to avoid any congestion of network links. We studied the complexity status of this problem from the viewpoint of graph structures, and clarified how the complexity status depends on the number of cycles or the number of servers in a graph. In many cases, this problem is computationally intractable, and hence we gave pseudo-polynomial-time algorithms based on a dynamic programming method and fixed-parameter algorithms.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：アルゴリズム グラフ理論

1. 研究開始当初の背景

近年、コンピュータネットワークの高速化・広帯域化によって、動画のストリーミング配信をはじめ、大容量通信を伴うコンテンツが配信されている。配信には大きな帯域の確保が必要であり、ユーザの要求に対し、サーバ割当をうまく行わなければ、回線の帯域が逼迫してしまい、将来生じる新たなユーザの要求に応えられなくなってしまう。

例えば、図1(a)は単純なコンピュータネットワークを「グラフ」を用いて表現した例である。ここで、グラフの点はサーバもしくはユーザに対応しており、グラフの辺はネットワークを表現している。また、サーバは四角で、ユーザは丸で描かれ、各回線の帯域は対応する辺の容量として与えられている。図1(a)において、時刻1にユーザ $u_1$ から10単位分の配信要求があったとする。この $u_1$ の要求は、図1(b)と(c)に示すように、サーバ $s_1$ でもサーバ $s_2$ でも満たすことができる。しかし、辺容量の変化は、その配信方法の選択に依存する。ここで、時刻2にユーザ $u_2$ から25単位分の配信要求があったとする。時刻1で図1(b)の配信方法を選択していれば、 $u_2$ にはサーバ $s_2$ から配信できるが、図1(c)の配信方法を選択していた場合には、 $u_2$ に配信できるサーバはない。このように、コンテンツを持続的に安定して供給するためには“ネットワークの余力”を最大化する配信方法を求めることが重要である。

しかし、このようなサーバ割当問題は、本研究課題の立案時には、理論計算機科学の観点からはほとんど研究されていなかった。特に、計算可能性は、限られたモデルに対する計算困難性が知られているだけであった。

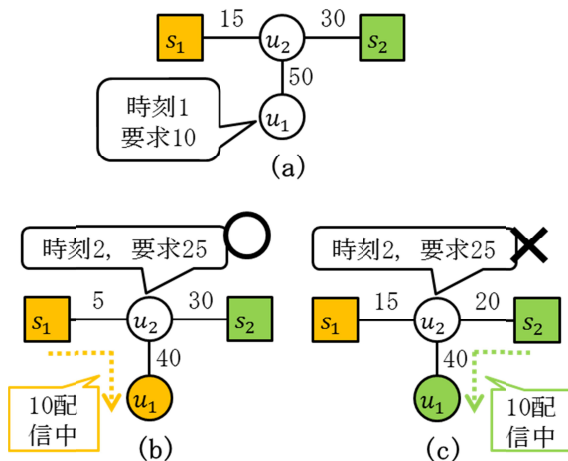


図1: 配信方法の違いによる辺容量の変化と、それに伴う次時刻の要求への対応の可否。

2. 研究の目的

本研究課題では、ネットワークの余力を最大化する配信方法を、グラフに関する組合せ問題として定式化し、その計算可能性を理論面から解明することを目的とした。特に、下

記の2つの観点から問題を区分し、研究を進めることとした。

- (1) **サーバからユーザへの配信経路の指定の有無**: サーバから各ユーザへの配信経路が定められている問題設定と、配信経路を自由に選べる問題設定の二通りがある。指定がある場合、配信はその経路に沿わなければならない。
- (2) **複数サーバによる配信の可否**: 各ユーザはただ1つのサーバからしか配信を受けられない問題設定と、複数サーバによる配信が許される問題設定の二通りがある。

これら二つによる区分から、サーバ割当問題の計算困難性と容易性を、グラフ構造を用いて解析する。グラフ構造を用いた解析は、ネットワークのどのような構造が問題を難しく(または易しく)しているのかを解析することに相当する。

3. 研究の方法

本研究課題では、関連研究の調査を行ったり、サーバ割当問題を小さな例題を用いて解析したりすることから開始した。特に、本研究課題では、グラフ構造がサーバ割当問題に与える影響に着目して研究を進めた。グラフ構造(グラフクラス)の特徴づけは詳細な解析が知られており、例えば図2に示すような包含関係がある。ここで、各四角に書かれた木、カクタス、ユニサイクルなどはグラフクラスの名前であり、グラフクラスAからグラフクラスBへの矢印は、Bに含まれるグラフは、Aのグラフクラスにも含まれることを示している。図2に示したグラフクラスは、どれもグラフセパレータを持つ。本研究課題では、この特徴を利用することで、サーバ割当問題の候補解を特徴づけ、動的計画法に基づくアルゴリズムを開発した。

また、本研究課題では国内外の研究者と積極的に共同研究を行うことで、サーバ割当問題だけでなく、ネットワークに現れる様々な問題にも本研究課題の知見を波及させることができた。

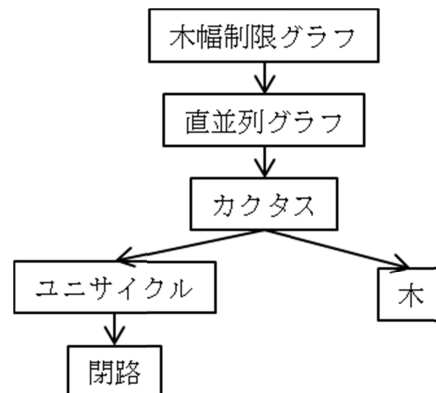


図2: 本研究課題で扱ったグラフクラスとその包含関係。

#### 4. 研究成果

本研究課題を通じて、サーバ割当問題に対し、グラフ構造の観点から計算困難性と容易性の境界をいくつか与えることができた。また、ネットワークをモデル化したグラフの様々な問題にも、本研究課題で得られたアルゴリズム手法やその知見を波及させることができた。詳しくは、下記の通りである。

各ユーザがただ1つのサーバからしか配信を受けられないモデルに関しては、配信経路の指定がない場合には NP 困難であることが知られている。また、配信経路の指定がある場合には多項式時間で解ける。したがって、本研究課題は、各ユーザが複数のサーバから配信を受けられるモデルを扱った。

本研究課題では、まずサーバからユーザへの配信経路が指定されているモデルを解析した。はじめに、グラフがカクタスであっても、サーバ割当問題が NP 困難であることを証明した。しかも、本研究課題で与えた証明は、近似精度を保持するように構成されており、サーバ割当問題がカクタスにおいて、どんな定数に対しても近似不可能であることを証明している。本研究課題の立案時には、木幅制限グラフに対して近似アルゴリズムを構築することも視野に入れていたが、カクタスは木幅2のグラフであるため、木幅制限グラフに対する近似アルゴリズムは構築できそうにないことが証明できたことになる。カクタスのグラフ構造は、木幅2のグラフの中でも比較的単純であり、組合せ問題の多くが多項式時間で解けることが知られている。したがって、単に NP 困難性を示すだけでなく、近似可能性まで否定する本研究課題の結果は意義深いものである。

一方で、木に対しては、動的計画法に基づく擬多項式時間アルゴリズムを構築した。アルゴリズムの計算時間は、点数と辺容量の最大値に対する多項式になっているため、辺容量が小さい(多項式サイズ)の入力であれば、多項式時間で実行されることになる。しかし、辺容量が多項式サイズとは限らない入力に対して、サーバ割当問題が NP 困難であるかどうかは未解決である。ただし、本研究課題では、1つのユーザに配信できるサーバの個数に上限が指定された場合には、木に対しても NP 困難になることを証明した。

本研究課題では、次に配信経路の指定がないモデルに関して研究を行った。このモデルに対しては、全ユーザの要求を満たす配信経路を策定するサーバ割当問題を特に解析した。このようなサーバ割当問題については、全ユーザの要求が限定的であれば、グラフのフロー問題に帰着することで、一般のグラフに対して多項式時間で解くことができる。また、グラフが木であれば、配信経路は実際には一意に定まり、ユーザの要求を限定せずとも多項式時間で解くことができる。したがって、本研究課題ではグラフ中の閉路がどのよ

うに計算可能性に影響を与えるか解析した。

その結果、グラフが閉路そのものであったとしても、このサーバ割当問題は NP 困難であることを証明した。特筆すべきは、NP 困難性は閉路にサーバが1つのみの場合に成り立ち、閉路であってもサーバが2個以上であれば多項式時間で解けることを示した点である。したがって、本研究課題の成果は、グラフ中のサーバの個数に関して、計算困難性と容易性の境界を与えている。さらに、木では多項式時間で解けることから、グラフ中の閉路の個数に関して、計算可能性の境界を与えたことになる。また、サーバの個数が増えれば問題が難しくなることが一般には多いが、本研究課題の問題ではサーバの個数が増えれば計算が容易になる点は興味深い。

一方で、グラフがユニサイクルであれば、サーバが2個以上であっても NP 困難であることを示した。なお、ユニサイクルは閉路をただ1つしか含まないことに注意されたい。そこで本研究課題では2つのアルゴリズムをユニサイクルに対して与えた。一つは、ユニサイクルに含まれる閉路上の辺容量の最大値と点数に関する擬多項式時間アルゴリズムであり、もう一つは、ユーザ数をパラメータとした固定パラメータ(FPT)アルゴリズムである。これらは、ともに多項式時間アルゴリズムではないが、その計算時間は入力に応じてそれぞれ利点を持つ。すなわち、ユーザ数が多くとも辺容量が小さい場合には擬多項式時間アルゴリズムが有利であり、辺容量が大きくともユーザ数が少ない場合にはFPTアルゴリズムが有利である。さらにこれらのアルゴリズムは、閉路の個数が定数個であれば、カクタスにも拡張できる。

最後に、ネットワークに現れる他問題への取り組みについて触れる。グラフの脆弱性最小化問題は、辺コストフロー最小化問題、辺素パス問題、共通辺最小化問題など様々な問題を一般化した問題である。この問題において、しきい値グラフや直並列二部グラフに対して NP 困難であることを示し、木幅制限グラフに対して擬多項式時間アルゴリズム、弦グラフに対して経路の本数をパラメータとしたFPTアルゴリズムを与えた。また、ネットワーク上での情報拡散をモデル化した問題も扱った。この問題においては、直並列グラフに対する NP 困難性を示し、線状森に対して擬多項式時間アルゴリズムを与えた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計26件)

Yusuke Aoki, Bjarni V. Halldórsson, Magnús M. Halldórsson, Takehiro Ito, Christian Konrad and Xiao Zhou, "The Minimum Vulnerability Problem on Specific Graph Classes," Journal of

Combinatorial Optimization, 査読有, 印刷中.  
DOI: 10.1007/s10878-015-9950-2  
Takehiro Ito, Hiroyuki Nooka and Xiao Zhou, "Reconfiguration of Vertex Covers in a Graph," IEICE Trans. on Information and Systems, 査読有, Vol. E99-D, No. 3, pp. 598-606, 2016.  
DOI: 10.1587/transinf.2015FCP0010  
Takehiro Ito, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno and Yushi Uno, "A Polynomial-Time Approximation Scheme for the Geometric Unique Coverage Problem on Unit Squares," Computational Geometry: Theory and Applications, 査読有, Vol. 51, pp. 25-39, 2016.  
DOI: 10.1016/j.comgeo.2015.10.004  
Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Eli Fox-Epstein, Duc A. Hoang, Takehiro Ito, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Ryuhei Uehara and Takeshi Yamada, "Linear-Time Algorithm for Sliding Tokens on Trees," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 600, pp. 132-142, 2015.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2015.07.037  
Katsuhisa Yamanaka, Erik D. Demaine, Takehiro Ito, Jun Kawahara, Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Toshiki Saitoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa and Takeaki Uno, "Swapping Labeled Tokens on Graphs," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 586, pp. 81-94, 2015.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2015.01.052  
Yuma Tamura, Takehiro Ito and Xiao Zhou, "Algorithms for the Independent Feedback Vertex Set Problem," IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E98-A, No. 6, pp. 1179-1188, 2015.  
DOI: 10.1587/transfun.E98.A.1179  
Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito and Xiao Zhou, "The List Coloring Reconfiguration Problem for Bounded Pathwidth Graphs," IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E98-A, No. 6, pp. 1168-1178, 2015.  
DOI: 10.1587/transfun.E98.A.1168  
Takashi Hasegawa, Takehiro Ito, Akira Suzuki and Xiao Zhou, "Experimental Evaluations of Dynamic Algorithm for Maintaining Shortest-Paths Trees on Real-World Networks," Interdisciplinary Information Sciences, 査読有, Vol. 21, No. 1, pp. 25-35, 2015.

DOI:10.4036/iis.2015.25  
Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro Ito and Xiao Zhou, "Generalized Rainbow Connectivity of Graphs," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 555, pp. 35-42, 2014.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2014.01.007  
Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Takehiro Ito and Eiji Miyano, "Complexity of Finding Maximum Regular Induced Subgraphs with Prescribed Degree," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 550, pp. 21-35, 2014.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2014.07.008  
Takehiro Ito, Kazuto Kawamura, Hirotaka Ono and Xiao Zhou, "Reconfiguration of List  $L(2,1)$ -Labelings in a Graph," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 544, pp. 84-97, 2014.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2014.04.011  
Takehiro Ito, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno and Yushi Uno, "A 4.31-Approximation for the Geometric Unique Coverage Problem on Unit Disks," Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 544, pp. 14-31, 2014.  
DOI: 10.1016/j.tcs.2014.04.014  
Taku Okada, Akira Suzuki, Takehiro Ito and Xiao Zhou, "On the Minimum Caterpillar Problem in Digraphs," IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E97-A, No. 3, pp. 848-857, 2014.  
DOI: 10.1587/transfun.E97.A.848

[学会発表](計13件)

Takehiro Ito, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Hisayuki Satoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Ryuhei Uehara, Katsuhisa Yamanaka and Xiao Zhou, "Competitive Diffusion on Weighted Graphs," The 14th Algorithms and Data Structures Symposium (WADS 2015), 2015年8月6日, ビクトリア(カナダ)  
Yusuke Aoki, Bjarni V. Halldórsson, Magnús M. Halldórsson, Takehiro Ito, Christian Konrad and Xiao Zhou, "The Minimum Vulnerability Problem on Graphs," The 8th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCO A 2014), 2014年12月20日, ハワイ(アメリカ)  
Takehiro Ito, Naonori Kakimura, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi and Yoshio Okamoto, "Minimum-Cost b-Edge Dominating Sets on Trees," The 25th Annual International Symposium on

Algorithms and Computation (ISAAC 2014),  
2014年12月15日, 全州(韓国)

Yuma Tamura, Takehiro Ito and Xiao Zhou,  
“Deterministic Algorithms for the  
Independent Feedback Vertex Set  
Problem,” The 25th International  
Workshop on Combinatorial Algorithms  
(IWOCA 2014), 2014年10月17日, ダル  
ース(アメリカ)

Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Takehiro  
Ito and Eiji Miyano, “Complexity of  
Finding Maximum Regular Induced  
Subgraphs with Prescribed Degree,” The  
19th International Symposium on  
Fundamentals of Computation Theory (FCT  
2013), 2013年8月19日, リバプール(イ  
ギリス)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 健洋 (ITO, TAKEHIRO)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号: 40431548