様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５３３００１７

研究課題名（和文）禁止部分グラフにおける標準的な研究手法の確立

研究課題名（英文）Standard methods for the study of forbidden subgraphs

研究代表者
斎藤　明（SAITO, Akira）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：９０１８６９２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた連結グラフの集合Ｆに対し、グラフ G がＦに属するどのグラフも誘導部分グラフに含まないとき、G はＦ-フリーであるとよばれる。Ｆフリーグラフの性質を調べる研究を禁止部分グラフの研究とよぶ。本研究は比較的対称性の高いグラフの無限列を構成し、それらに共通に含まれる誘導部分グラフの性質を調べることにより、禁止部分グラフの研究の効率化につながる一般的な手法を確立した。またこの手法を用いて禁止部分グラフに関する未解決問題を解くことにより、本手法の有効性を確認した。

研究成果の概要（英文）：For a set F of finite connected graphs, a graph G is said to be F-free if G does not contain an induced subgraph which is isomorphic to any member of F. The set F is often referred as forbidden subgraphs. In this research, we have constructed infinite sequences of graphs consisting of graphs with relatively high symmetry, and studied induced subgraphs commonly contained in each member of the sequences. This has led us to establish a common methods which are applicable to a number of studies on forbidden subgraphs. Then we have applied these methods and solved several problems concerning forbidden subgraphs and demonstrated the effectiveness of these methods.

研究分野：グラフ理論

キーワード：禁止部分グラフ　グラフ　ハミルトンサイクル　因子

1. 研究開始当初の背景

与えられた連結グラフ H について、グラフ G が H に同形なグラフを誘導部分グラフに含まないとき、G は **H-フリーである**、あるいは G において **H は禁止されている**という。また連結グラフから成る集合 $\mathcal{H}$ に対して、グラフ G が $\mathcal{H}$ の全ての要素 H について H-フリーとなるとき、G は **$\mathcal{H}$-フリーである**、あるいは G において $\mathcal{H}$ は禁止されている、という。与えられた連結部分グラフの集合 $\mathcal{H}$ について $\mathcal{H}$-フリーグラフの性質を調べる研究は**禁止部分グラフの研究**とよばれる。

禁止部分グラフの研究は、グラフ理論の様々なテーマについて進められている。たとえばハミルトンサイクルの分野では、「3 以上の任意の整数 n について、位数 n のグラフ G の最小次数が $\frac{1}{2}n$ 以上あれば、そのグラフはハミルトンサイクルをもつ」という Dirac による古典的な定理がある。この定理は最小次数の条件について最良であり、3 以上の各奇数 n について、位数 n、最小次数 $\frac{1}{2}(n-1)$ であり、かつハミルトンサイクルをもたないグラフが存在する。ところが 1984 年に Matthews と Sumner は 3 以上の任意の整数について、位数 n であり最小次数が $\frac{1}{3}(n-2)$ 以上ある 2-連結な $K_{1,3}$-フリーグラフはハミルトンサイクルをもつことを証明した。また一般には任意の正整数 k について、k-連結でありながらハミルトンサイクルをもたないグラフが無数に存在する。ところが 1997 年に Ryjáček は 7-連結な $K_{1,3}$-フリーグラフはハミルトンサイクルをもつことを示している。

またマッチング、因子と禁止部分グラフの関係もよく調べられている。たとえば一般には偶位数の連結グラフで完全マッチングを持たないものは無数に存在する。しかし Las Vergnas (1975) と Sumner (1976) は、偶位数の連結な $K_{1,3}$-フリーグラフは完全マッチングを持つことを証明した。また本研究代表者は 2005 年に位数 3 以上の連結グラフ H について、もし偶位数の連結な H-フリーグラフが完全マッチングを持つのであれば、$H = K_{1,3}$ または $H = K_{1,2}$ であることを証明した。これら 2 つの結果から、偶位数の連結グラフのクラスにおいて 1 個のグラフを禁止することにより、完全マッチングの存在を強制するような禁止部分グラフを決定された。

禁止部分グラフによるグラフの性質の研究は、ハミルトンサイクル、完全マッチングの他にもいろいろなテーマで行われている。こうした研究には、調べている性質に強く依存する議論もあるが、その一方で、個々の性質に依存せず、禁止部分グラフの特性のみに依存する議論も多い。しかしこれまでの研究では、調べる性質に主眼が置かれており、共通に通用する部分への注意はあまり払われてこなかった。そのため異なる研究で本質的に共通する議論が繰り返され、研究に非効率的な面が見られた。

2. 研究の目的

前項で述べた背景の下、本研究はグラフの個々の性質を強く意識せず共通して進められる議論を方法論に昇華することを目指した。このような方法論が確立すれば、禁止部分グラフの研究は、個々の性質に依存しない部分と依存する部分に分離され、個々の性質に依存しない部分については、共通の手法が適用される。これは禁止部分グラフの研究の効率化につながる。

3. 研究の方法

一般的に、与えられたグラフの性質 P について、P を保証する禁止部分グラフの特定は以下のように進められる。

- P を満たさないグラフの無限系列を構成し、その無限系列に属するグラフが共通に持つ誘導部分グラフの条件を蓄積する。
- これらの条件 1 つ 1 つは性質 P の必要条件に過ぎないが、上記の無限系列を十分多く集めていくと十分条件となる。

上記の方針のうち「性質 P を満たさないグラフの無限系列」では、研究する性質にあまり依存せず、完全グラフ、完全 2 部グラフ、パス、サイクルなど対称性が高い標準的なグラフが利用される。その理由は、無限列の項となるグラフの対称性が低いと それらの中に共通に含まれる誘導部分グラフの構造が貧弱になるためである。そこでまず対称性の高いグラフごとに、それらが生み出す無限系列の誘導部分グラフの性質をリストアップし、また性質ごとにどの系列を用いるべきかを示す指針を提示した。こうして禁止部分グラフの研究手法の多くを共通化した。

本研究期間の後半では、得られた研究の有効性をグラフの性質ごとに調べた。グラフ理論の研究テーマでは禁止部分グラフによるアプローチが盛んに行われるものと、そうではないものが存在する。これはグラフの性質に禁止部分グラフと相性の良いものと悪いものが存在することを示唆している。本研究はグラフの様々な問題に禁止部分グラフからのアプローチを試み、本課題研究が導入した方法論を適用できるか否かを調べた。

4. 研究成果

本課題研究により、禁止部分グラフの研究で頻繁に用いられる以下のグラフの無限系列について、それらを用いてグラフの絞り込みを行う標準的な手法を確立した。

(1) 完全グラフ

(2) スター以外の完全 2 部グラフ

(3) スター

(4) パス

(5) サイクル

(6) $(tK_1 \cup K_{n-t-1}) \vee K_1$

(7) $(tK_2 \cup K_{n-2t-1}) \vee K_1$

スターは、一方の部集合の位数が 1 である完全 2 部グラフであり、その系列は完全 2 部グラフの系列の特別な場合と考えることもできる。しかしスターは同時に木でもあり、木の性質を手法に織り込むことができる。研究を進めるにつれ、この木としての特性には他の完全 2 部グラフにはない有用性があることが分かり 一般の完全 2 部グラフの系列と区別して扱うこととなった。

研究の中盤以降では、得られた研究手法を用いて禁止部分グラフに関する様々な問題に取り組み、手法の有用性を立証した。具体的には以下の成果を得た。

(1) 禁止部分グラフと指定辺を避ける完全マッチング

Sumner は 1976 年に、$m \geq 4$ なる任意の整数 m について、偶位数の $(m-1)$-連結な $K_{1,m}$-フリーグラフには完全マッチングが存在することを証明した。Aldred と Plummer は Summner の結果を指定された辺を避ける完全マッチングに拡張し、以下の定理を証明した。

定理 A (Aldred & Plummer (1999)) $k,\ m$ を $1 \leq k \leq m$ なる整数とする。このとき任意の偶位数の m-連結な $K_{1,m-k+2}$-フリーグラフ G と $|F| \leq k$ なる任意の $F \subset E(G)$ について $G - F$ は完全マッチングをもつ。

Theorem A は $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(m+1)$ の範囲で最良であり、偶位数の m-連結な $K_{1,m-k+3}$-フリーグラフ G と $|F| = k$ なる $F \subset E(G)$ について、$G - F$ 完全マッチングを持たないような (G, F) の例が無数に構成できる。ところがこれらの例は $k \geq \frac{1}{2}(m+2)$ で全て消失し、$k \geq \frac{1}{2}(m+2)$ の範囲における最良性が不明であった。

本研究代表者は開発した手法を用いて、$k \geq \frac{1}{2}(m+2)$ では定理 A が最良ではないことを証明した。

定理 1 k, m を $m \geq 4$ かつ $\frac{1}{2}(m+2) \leq k \leq m$ を満たす整数とする。このとき任意の偶位数の m-連結な $K_{1,\lceil \frac{2m-k+4}{3} \rceil}$-フリーグラフ G と $|F| \leq k$ なる任意の $F \subset E(G)$ について $G - F$ は完全マッチングをもつ。

また得られたスターの位数に関する条件が $k \geq \frac{1}{2}(m+2)$ の範囲で最良であることも示した。

(2) 局所 Chvátal–Erdős 条件と 2-因子

ハミルトンサイクルの存在については、Chvátal と Erdős による以下の古典的な結果が知られている。グラフ G の独立数を $\alpha(G)$、連結度を $\kappa(G)$ と表す。

定理 B (Chvátal–Erdős の定理) 位数 3 以上のグラフ G が $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ を満たせば、G はハミルトンサイクルをもつ。

定理 B はハミルトンサイクル研究における基本的な定理であり、その定理の仮定 $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ は **Chvátal–Erdős 条件**とよばれる。

グラフ G の頂点 x について、x の近傍 $N_G(x)$ が G において連結グラフを誘導するとき、x は**局所連結な頂点**とよばれる。また G の全ての頂点が局所連結であるとき、G は**局所連結なグラフ**とよばれる。Oberly と Sumner は 1979 年に以下の定理を発表した。

定理 C (Oberly & Sumner (1979)) 位数 3 以上の連結かつ局所連結な $K_{1,3}$-フリーグラフはハミルトンサイクルをもつ。

一見すると定理 B と定理 C には何の関係もないように見える。しかし「局所化」という観点から眺めると、両者の密接な関連が浮かび上がる。グラフ G の頂点 x について、$N_G(x) \cup \{x\}$ で誘導される G の部分グラフを G_x と表す。すると x が局所連結であることと、G_x が 2-連結であることは同値である。また G が $K_{1,3}$-フリーであることと、G の任意の頂点 x について $\alpha(G_x) \leq 2$ であることも同値である。従って定理 C は以下のように言い換えられる。

定理 D 位数 3 以上の連結グラフ G の任意の頂点について $\alpha(G_x) \leq 2 \leq \kappa(G)$ が成り立てば、G はハミルトンサイクルをもつ。

すなわち任意の $x \in V(G)$ について G_x が間に定数 2 を挟む形で Chvátal–Erdős 条件を満たせば、G がハミルトサイクルをもつことを主張している。

このような視点から Oberly–Sumner の定理を眺めると、G_x が Chvátal–Erdős 条件を満たしていれば、特に間に定数 2 を挟んでいなくてもハミルトンサイクルの存在が保証されるのではないか、という疑問にたどり着く。これは本研究代表者が 2008 年に提出した予想であり、局所 Chvátal–Erdős 予想とよばれている。

予想 2 位数 3 以上の連結グラフの任意の頂点が $\alpha(G_x) \leq \kappa(G)$ を満たせば、G はハミルトンサイクルをもつ。

この予想は、現在未解決である。

与えられたグラフの 2-正則な全域部分グラフを、そのグラフの 2-因子とよぶ。ハミルトンサイクルは連結な 2-因子と解釈することができる。そこで予想 2 の仮定の下で、まず 2-因子の存在を示すことができれば、予想解決への第一歩となる可能性がある。ハミルトンサイクルが存在するための非自明な必要十分条件は知られていないが、2-因子については、その存在を知るための有用な必要十分条件が知られている。そこで本研究代表者は、本課題研究で得た手法をこの必要十分条件に適用し、予想の仮定の下で 2-因子の存在を示した。

定理 3 位数 3 以上の連結グラフの任意の頂点が $\alpha(G_x) \leq \kappa(G)$ を満たせば、G は 2-因子をもつ。

本定理は予想 2 解決のための重要な一里塚となると考えられる。

(3) Ryjáček 閉包の拡張可能性

ハミルトンサイクルの研究において、Ryjáček は 1997 年に Ryjáček 閉包とよばれる強力な手法を編み出した。グラフ G の頂点 x が局所連結であり、かつ G_x が完全グラフを誘導しないとき、x は **eligible な頂点**であるという。また x の近傍内にある非隣接 2 頂点を全て辺で結ぶ操作、およびその操作で得られるグラフを G の x における **local completion** とよぶ。与えられたグラフ G について、local completion を繰り返す操作を考える。すなわち $G = G_0$ とおき、$i \geq 0$ について、もし G_i に eligible な頂点 x_i があれば、x_i に local completion を施して G_{i+1} を得る。このようにしてグラフの列 $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_m$ を得る。local completion により必ず 1 本以上の辺が加えられる一方、完全グラフには eligible な頂点は存在しない。従って、この列は有限列となる。もし G_m に eligible な頂点がなければ G_m を G の **Ryjáček** 閉包とよぶ。各 G_i における x_i の選び方により G_{i+1} は変わり得るので、定義上は G_m は途中の $x_0, \ldots, x_{m-1}$ の取り方に依存する。しかし Ryjáček はこの操作の一意性と Ryjáček 閉包のハミルトンサイクルに関して、以下のような定理を発表した。

定理 E (Ryjáček (1997))

(1) 任意のグラフ G について、Ryjáček 閉包は一意的に定まる（以後 G の Ryjáček 閉包を $\mathrm{cl}_R(G)$ と表す）。

(2) G が $K_{1,3}$-フリーグラフであるとき、G がハミルトンサイクルをもつことと $\mathrm{cl}_R(G)$ がハミルトンサイクルをもつことは同値である。

この定理は非常に強力であり、ハミルトンサイクルの研究に大きなインパクトを与えた。たとえば局所連結なグラフに Ryjáček 閉包を施すと完全グラフが得られる。位数 3 以上の完全グラフはハミルトンサイクルをもつので、定理 C は定理 E の簡単な系となる。また線グラフとよばれるグラフのクラスがあり、線グラフはハミルトンサイクルに関して良い振る舞いを示すことが知られている。線グラフは $K_{1,3}$-フリーであることが知られているので、Ryjaáček 閉包が発表されるまでは、$K_{1,3}$-フリーグラフのハミルトン性を調べる際に、まず線グラフで調べてみるというアプローチが試みられてきた。ところが任意の $K_{1,3}$-フリーグラフ G について、$\mathrm{cl}_R(G)$ は線グラフになるので、線グラフに限定しても問題の難度は下がらないことが分かる。

上記のように $K_{1,3}$-フリーグラフのハミルトン性を研究する際に Ryjáček 閉包は非常に有効な手法となる。そこで他の禁止部分グラフについても Ryjáček 閉包を利用したいという要求が生じる。本研究代表者はこの点について研究を進め、以下のような否定的な結果を得た。

定理 4 H を位数 3 以上の連結グラフとする。このとき任意の H-フリーグラフ G について G がハミルトンサイクルをもつことと $\mathrm{cl}_R(G)$ がハミルトンサイクルをもつことが同値になるならば、H は $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, K_3, $K_2 \vee 2K_1$ のいずれかである。

定理 5 H が $K_{1,2}$, K_3, $K_2 \vee 2K_1$ のいずれかのグラフであるとき、H-フリーグラフには eligible な頂点が存在しない。

定理 4 によれば、Ryjáček 閉包を用いてハミルトンサイクルの性質を調べる手法が有効になる禁止部分グラフは $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, K_3, $K_2 \vee 2K_1$ に限られる。ところがこれらのうち $K_{1,3}$ 以外のグラフを禁止すると eligible な頂点が現れず、Ryjáček 閉包をとってもグラフは変化しない。従ってこの手法で非自明な結果を与える禁止部分グラフは $K_{1,3}$ のみであることになる。すなわち Ryjáček 閉包は $K_{1,3}$-フリーグラフに対してのみ有効であり、他のクラスに適用してもハミルトン性に関する有用な知見を得ることができない。

以上のように、本研究代表者は禁止部分グラフに関する一般的な研究手法を確立し、それを用いて様々な重要な結果を得ることができた。

5. 主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

[雑誌論文]（計 9 件）

(1) N. Ananchuen, W. Ananchuen and A. Saito, Extendability of the complementary prism of bipartite graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 査読有, **66** (2016) 436–448, `http://ajc.maths.uq.edu.au/`

(2) A. Saito and L. Xiong, The Ryjáček closure and a forbidden subgraph, Discussines Mathematicae Graph Theory, 査読有, **36** (2016) 621–628, DOI:10.7151/dmgt.1876

(3) A. Saito and K. Sano, Spanning trees homeomorphic to a small tree, Discrete Mathematics, 査読有, **339** (2016) 677–681, DOI:10.1016/j.disc.2015.10.004

(4) Y. Egawa, J. Fujisawa, M.D. Plummer, A. Saito and T. Yamashita, Perfect matchings avoiding prescribed edges in a star-free graph, Discrete Mathematics, 査読有, **338** (2015) 2260–2274, DOI:10.1016/j.disc.2015.05.014

(5) Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, Electronic Journal of Combinatorics, 査読有, **22** (3), (2015), #P13, `http://www.combinatorics.org`

(6) M.D. Plummer and A. Saito, A note on graphs contraction-critical with respect to independence number, Discrete Mathematics, 査読有, **325** (2014) 85–91, DOI:10.1016/j.disc.2014.02.004

(7) C. Ojima, A. Saito and K. Sano, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance, Discrete Applied Mathematics, 査読有, **166** (2014) 170–177, DOI:10.1016/j.dam.2013.10.012

(8) G. Chen, A. Saito and S. Shan The existence of a 2-factor in a graph satisfying the local Chvátal–Erdős condition, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 査読有, **27** (2013) 1788–1799, DOI:10.1137/12090037X

(9) J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, Discrete Mathematics, 査読有, **313** (2013) 1835–1842, DOI:10.1016/j.disc.2012.05.015

[学会発表]（計 18 件）

(1) Akira Saito, Forbidden subgraphs in edge-colored graphs, (招待講演), 2017 Joint Mathematics Meetings, 2017 年 1 月 6 日, Atlanta(米国)

(2) 斎藤 明, Toughness, binding number and restricted matching extension, 日本数学会秋季総合分科会, 2016 年 9 月 16 日, 関西大学 (大阪府・吹田市）

(3) 斎藤 明, The Chvátal–Erdős condition and a 2-factor with two components in a graph, 日本数学会年会, 2016 年 3 月 17 日, 筑波大学（茨城県・つくば市）

(4) Akira Saito, Forbidden subgraphs and 2-factors in graphs (招待講演), 1117th Meeting of the American Mathematical Society, 2016 年 3 月 5 日, Athens(米国)

(5) Akira Saito, Forbidden subgraphs and matchings in graphs, (招待講演), Symposium on Graph Theory and Applications 2016, 2016 年 1 月 15 日, Manila(フィリピン)

(6) Akira Saito, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance, (招待講演), Symposium on Graph Theory and Applications 2016, 2016 年 1 月 13 日, Manila(フィリピン)

(7) Akira Saito, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance (招待講演), Freiberger Graphentheorietage, 2015 年 12 月 3 日, Freiberg(ドイツ)

(8) Akira Saito, Forbidden subgraphs and 2-factors, (招待講演), The second Japan-Sino Symposium on Graph Theory, Combinatorics and Their Applications, 2015 年 11 月 3 日, 東京理科大学（東京都・新宿区）

(9) 斎藤 明, Extendability of the complementary prism of a bipartite graph, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大学（京都府・京都市）

(10) Akira Saito, Spanning trees homeomorphic to a small tree (招待講演), International Conference on Graph Theory in Honor of Adrian Bondy's 70th. Birthday, 2015 年 4 月 18 日, 福州（中国）

(11) Akira Saito, The Ryjáček closure and a forbidden subgraph, 8th. Workshop on the Matthews-Sumner Conjecture and Related Problems, 2015 年 3 月 31 日, Pilsen(チェコ)

(12) 斎藤 明, The Ryjacek clocure and a forbidden subgraph, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 22 日, 明治大学（東京都・千代田区）

(13) 斎藤 明, Spanning trees homeomorphic to a small tree 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学（広島県・東広島市）

(14) Akira Saito, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance, (招待講演), Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2014, 2014 年 8 月 27 日, つくば国際会議場（茨城県・つくば市）

(15) Akira Saito, A spanning tree homeomorphic to a small tree, (招待講演), SIAM Conference on Discrete Mathematics, 2014 年 6 月 18 日, Minneapolis(米国)

(16) 斎藤 明, Contraction-critical graphs with respect to independece number 日本数学会年会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学（東京都・豊島区）

(17) 斎藤 明, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 25 日, 愛媛大学（愛媛県・松山市）

(18) Akira Saito, Precoloring extension involving pairs of vertices of small distance, 24th. British Combinatorial Conference, 2013 年 7 月 2 日, London(英国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

斎藤 明（SAITO, Akira）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90186924

(2) 研究分担者

なし