

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25330033

研究課題名(和文)固有値分布の数値計算の数理と応用

研究課題名(英文)Theory and application on the numerical computaion for eigenvalue distribuion

研究代表者

橋口 博樹 (Hashiguchi, Hiroki)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：50266920

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、固有値分布に関して正確な数値計算に関する数理、近似分布の導出に関する数理、現実問題への適用を考慮した応用を扱った。正確計算、近似計算ともに新しい方法を提案する事ができ、シミュレーションを通して有効性の確認を行った。これらの正確分布や近似分布の方法論は、当初想定していなかった問題へも有効であることも分かりより発展できた。また、現実問題への適用のテーマでは、無線通信での通信路容量の導出や方向統計学での一様性の検定問題、2標本問題における等分散性の検定を扱った。

研究成果の概要(英文)：This research consider the theory of exact and/or approximate computation for the eigenvalue distribution as well as their practical applications. Several proposed methods are more efficient than the already known methods through our numerical experiments. Their methods can be extend to solve problems that we didn't consider at the first stage in the research process. Practical applications include the capacities of MIMO, uniform test in statistical directional analysis and homogeneity test of covariance matrices.

研究分野：統計科学

キーワード：多変量解析 ランダム行列

### 1. 研究開始当初の背景

本研究では、ランダム行列の固有値分布の数値計算に関係する理論と応用について研究する。理論面では、統計科学の枠を超えて代数学や組合せ論的な手法を取り入れながら、これまでにない新たな方法論を提案する。

次に、数理統計学がこれまで対象としていた実データの解析から複素データ解析への応用を考え、無線通信の数学モデルを研究し、本方法による通信路容量の新たな近似計算法を提案する。代表者のこれまでの研究成果を発展させる観点から、ランダム行列の固有値分布の正確な数値計算に関する数理(テーマ1)、近似分布導出に関する数理(テーマ2)を研究し、テーマ1、2の現実問題への適用を考慮した応用(テーマ3)へと結びつける。

### 2. 研究の目的

研究課題として、固有値分布の数値計算に関する理論的な方法論の構築、その応用を目的として、以下の具体的な3つのテーマを掲げた。

(1) ランダム行列の固有値分布の正確な数値計算に関する数理

(2) 近似分布導出に関する数理

(3) 現実問題への適用を考慮した応用

ランダム行列理論は、1930年代のウィシャートらによる数理統計学の研究に起源をもち、理論物理、純粋数学の分野で主に研究が続けられ、近年、生態学、金融、社会科学へ応用されるなど、応用分野への発展も目覚ましいものがある。数理統計学の分野では1960年代に入り、代数学との関連の深いゾーナル多項式が紹介されたことを契機に、この多項式を使った固有値の分布の表現がその後の30年にわたり求められてきた。しかし、これらは容易に数値計算可能な表現ではなく、統計学で重要な密度関数やパーセント点といった数値計算は最近になってようやく行われるようになった。それでもなお、固有値の分布関数は行列変数の無限級数となるため、どこまでの次数で打ち切れば、どの程度良い精度かという問題などが未解決問題として残されている。したがって、数値計算に関する有効な方法(テーマ1)や近似方法(テーマ2)が、理論的な見地から要求される。さらに、固有値分布の応用的側面の多様性から鑑み、応用的見地からもテーマ1,2を現実問題へ適用すること(テーマ3)を目的とした。

### 3. 研究の方法

本研究は3つのテーマを代表者橋口が研究総括を行い、各テーマに関して主査をおいて研究体制を明確にして遂行していった。研究体制は以下の通りである。

橋口博樹(東京理科大学)研究代表者

役割: テーマ(1),(2)の分布論についての理論研究および研究総括。

中川重和(倉敷芸術科学大学)研究分担

者

役割: テーマ(1),(2)の数理的課題の補助。テーマ(1),(2)に関する研究協力者への数値実験アドバイザー。

小野陽子(横浜市立大学)連携研究者

役割: テーマ(3)に関するデータ解析への応用の検討とその評価

研究テーマ(1),(2)に関する数理的課題は研究代表者が積極的に取り組み、数値計算とその検証に関する課題は研究協力者(研究室学生)が行った。研究分担者・中川氏は、研究協力者が開発したプログラムや、数値実験の妥当性の検証をしてもらいながら、また、プログラムの非効率的な部分のチェックや修正を担当してもらうことで、より洗練されたプログラムを作成した。さらに、連携研究者・小野氏には、テーマ3に関する実数のデータ解析への応用を検討してもらった。3年間での研究旗協力者は、のべ20人程度であり、プログラムの作成から共同による学会発表を行ってもらった。

### 4. 研究成果

(1) 概要: 本研究は、固有値分布に関して3つのテーマからなる。テーマ1は、正確な数値計算に関する数理、テーマ2は、近似分布の導出に関する数理、テーマ3は、現実問題への適用を考慮した応用である。H25からH27年度にかけて、学術論文の6本が刊行され、27件の学会発表、そのうち4件の国際会議での口頭発表、2件の国際会議でのポスター発表を行った。テーマ1,2に関する成果を含めた総合報告としても紹介した。また、ホロノミックグラディエント法を分布計算に応用した。テーマ2では、まだ査読中のため報告書には記載がないが投稿中論文1件がある。テーマ3では、無線通信理論への応用としてMIMOの通信路容量の導出を固有値分布の近似を基に行った。本テーマは複素数の統計解析の理論であり、これまでの実数の理論を応用したものである。また、乱数生成の応用では方向統計学が必要とされる分布について、テーマ1の方法論を適宜修正して適用可能なものとした。さらに、複素数の統計学への応用として統計的形状解析で必要とされる分布についても、テーマ1,2での成果が適用可能であることが分かってきた。

(2) テーマ1: 正確分布の数値計算

テーマ1に関する成果としては、ホロノミックグラディエント法を固有値分布の数値計算に適用し、その有用性を示した。具体的には主成分分析で重要となる第一固有値の分布計算である。この分布は行列変数の超幾何関数で表現でき、ゾーナル多項式の無限級数となることが知られている。この無限級数は指数的に計算量が増えるため数値計算は非常に難しい問題であった。本方法では原点の近傍の級数を初期値として、微分方程式系でつなぐことで問題を解決した。次に、標本相

関係数の分布において、ホロノミックグラディエント法を分布計算に適用した成果を国際会議でポスター発表や学会で発表した。

次に、正規母集団下での共分散行列分布論を楕円母集団の議論へと発展させた。近年、楕円母集団の下でのウィシャート行列の固有値の分布論が提唱され、楕円ウィシャート分布の密度関数、固有値の同時密度、最大最小固有値の正確な分布関数が導出されている。しかし、正規母集団下の議論では、ウィシャート行列の固有値に関する統計量の正確な分布関数、モーメントの表現が求められている一方で、分布関数やモーメントに現れるゾーナル多項式、その級数である超幾何関数の計算が困難であったために漸近論へと研究が移行してきた歴史がある。楕円母集団の場合では、漸近論での近似分布の導出が正確分布よりも先行して研究されてきた。近年、ゾーナル多項式や超幾何関数の計算がある程度可能になってきたこともあり、楕円母集団の場合においても正確分布の導出と数値計算の研究を行うに至った。本研究では、既存の楕円ウィシャート行列の最大最小固有値の分布について、行列変量  $t$  分布を例とした数値計算を試みた。最大固有値の分布関数は、通常ウィシャート行列と同様にゾーナル多項式の無限級数となることから、十分大きな次数で打ち切った場合の近似分布関数を数値計算した。さらに分布関数の上界を与え、打ち切り分布関数と上界を与える関数との比較を行った。最小固有値の分布では、正確分布の数値計算を行った。

### (3) テーマ2：近似分布について

ウィシャート行列の固有値の分布については、最大と最小の固有値の分布のみ正確な表現が知られており、特に最大固有値の分布は行列変数の合流型超幾何関数を用いて表わされる。しかし、この分布の正確計算は困難であるため、いくつかの近似法が提案されている。本研究では、一標本問題において、固有値分布をカイ2乗分布、あるいは、カイ2乗分布の積で近似する方法を提案した。このカイ2乗の積による近似は、これまで知られている単体でのカイ2乗近似よりも数値精度の高いことをシミュレーションによる数値実験により示した。さらに、単体でのカイ2乗、カイ2乗の積による近似において、両者による母集団固有値の信頼区間の構成を扱った。後者は、全ての母集団固有値を推定した上で信頼区間を構成する必要があり、推定量のバイアス補正が課題として残るものの、いくつかの母集団固有値の設定においては、単体でのカイ2乗による信頼区間よりも第1種の過誤が5パーセントに制御できおり、精度が良いという結果であった。また、既存の合流型超幾何関数の1次ラプラス近似を改良する目的で、ラプラス近似のオーダを上げ2次ラプラス近似を求めること、および、新たなキャリブレーションの方法による1次

ラプラス近似を提案した。前者の2次ラプラス近似は1次ラプラス近似と数値的には同等であるものの、後者のキャリブレーションの改良は、母固有値間が近い状況で大幅に精度を改善することが分かった。このキャリブレーションの方法では帰無分布の正確計算を利用して、帰無分布に近い固有値の設定に拡張したものである。さらに、1次ラプラス近似の極限と、新たなキャリブレーションによる1次ラプラス近似の極限を定理として与え、これらの極限の比較からも提案法の有効性を示した。また、数値シミュレーション実験を行い、既存の方法よりも有効である事を示した。

次に2標本問題をととして、ウィシャート行列の比に関する固有値分布の近似を行った。固有値分布には行列変数を含む超幾何関数の計算が必要であるが、次元や自由度が高くなると計算コストや数値精度に問題がある。ウィシャート行列の比に関する固有値分布について、 $F$ 分布を用いた近似分布、および、 $F$ 分布の積による近似分布を提案した。固有値の同時密度を考え、ラプラス近似を用いて同時密度を近似している。次に、母固有値が離れるという設定での極限を考えることで、全ての固有値が互いに独立であって、各固有値が第二種ベータ分布で近似できることを示した。さらに、適切な変数変換を用いることにより、各固有値の分布は、第一種ベータ分布や $F$ 分布に変換できることを示した。各固有値が独立に $F$ 分布に従うことから、固有値の大小を考慮して $F$ 分布の積による近似を提案し、平均のずれに対するバイアス補正を行った。

### (4) テーマ3：応用研究について

複素数の統計学、ランダム行列の応用として、複素ウィシャート分布が登場する無線通信技術 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) と呼ばれる伝送技術を扱った MIMO は、送信側と受信側のそれぞれに複数のアンテナを用い、伝送速度を向上させるという特徴をもつ。この MIMO の数学モデルでは、ランダム行列論、特に複素ウィシャート行列の理論が重要である。MIMO における伝送路容量が複素ウィシャート行列の固有値分布を用いて解析できることが知られている。既に複素ウィシャート行列の最大、最小固有値分布の精密分布が求まっている。しかし、この精密分布の分布関数では複素ゾーナル多項式(シュアー多項式)の級数計算が必要であり、この級数は自由度や次元が大きくなるにつれて数値計算が困難となる。精密分布の計算を避けるために、複素ウィシャート行列の最大、最小固有値分布をガンマ分布により近似した。それらの中間の固有値分布をガンマ分布により近似できることも分かった。この成果は実数のカイ2乗近似の複素数版である。さらに、特異ウィシャート行列の固有値分布についても、近似分布を求め、MIMO での伝送路容量に関するシミュレーション実験を

行った。

また、方向統計学の代表的な分布である von Mises 分布について、微分方程式を利用した新たな分位点の計算法、および、逆関数法による乱数生成法を提案した。既存の von Mises 分布の乱数生成は、巻き込み Cauchy 分布で覆う採択棄却法が一般的であるが、この方法は棄却率が高いことが問題と考えられる。微分方程式を利用した逆関数法では、全く棄却せずとも乱数を生成できる利点がある一方で、前処理に時間がかかるという点を考慮する必要があった提案法と既存方法の計算時間や棄却率の観点から比較した。次により次元の大きい問題として、超球面上の一様性検定を扱い、主成分方向を考慮に入れた方法を提案した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

杉山高一, 橋口博樹

ウィシャート行列の固有値分布とその数値計算, 日本統計学会誌 45 巻 第 1 号 pp. 193--210 (査読有) 2015.

[http://ci.nii.ac.jp/vol\\_issue/nels/AA11989749\\_ja.html](http://ci.nii.ac.jp/vol_issue/nels/AA11989749_ja.html)

Nakagawa, S., Hashiguchi, H., Niki, N. Recurrence formula on the joint distribution of sample skewness and kurtosis, Communications in Statistics - Theory and Methods- Volume 45, Issue 4, 2016 DOI:10.1080/03610926.2013.859704 (査読有)

K.Kuroda, H.Hashiguchi, K.Fujiwara, T.Ikeguchi. Reconstruction of network structures from marked point processes using multi-dimensional scaling, Physica A 415 (2014) 194-204. (査読有) doi:10.1016/j.physa.2014.08.001

加藤仁志, 橋口博樹

固有値分布のカイ 2 乗近似と母固有値の信頼区間の構成, 計算機統計学, 27 巻 1 号, 2014, 11-28 (査読有)

<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009865895>

T. Sugiyama, T. Ogura, Y. Takeda, H. Hashiguchi, Approximation of upper percentile points for the second largest latent root in principal component analysis, Int. J. of Knowledge Engineering and Soft Data Paradigms, 2013 Vol.4, No.2, pp.107--117 (査読有)

DOI 10.1504/IJKESDP.2013.058126

H.Hashiguchi, Y.Numata, N.Takayama, A. Takemura, The holonomic gradient method for the distribution function of the largest root of a Wishart matrix, Journal of Multivariate Analysis 117 (2013) 296-312. (査読有)

doi:10.1016/j.jmva.2013.03.011

[学会発表](計27件)

篠崎絢, 橋口博樹, 瀬尾隆

楢円ウィシャート行列における最大最小固有値の正確分布とその数値計算, 日本計算機統計学会, 第30回大会, ハートピア京都, 京都市, 2015/5/20.

雨ヶ谷 萌, 橋口博樹, 岩下 登志也, Bernhard Klar, 主成分射影に基づく超球面一様性の検定, 日本計算機統計学会, 第30回大会, ハートピア京都, 京都市, 2015/5/20.

H. Hashiguchi, S. Nakagawa and Y. Ono Holonomic properties for the distribution of the sample correlation coefficient, IASC-ARS 2015, Singapore.2015/12/18.

T. Kuwabara and H. Hashiguchi Approximate gamma distributions for eigenvalues of a complex Wishart matrix and applications of MIMO capacity IASC-ARS 2015, Singapore, 2015/12/18.

豊島勇大, 橋口博樹,

ウィシャート行列の最大固有値分布に対するラプラス近似の改良, 日本計算機統計学会, 第29回シンポジウム, 釧路市生涯学習センター, 釧路市, 2015/11/27.

松原秀高, 橋口博樹,

ウィシャート行列の比に関する標本固有値のバイアス補正の検討, 日本計算機統計学会 第29回シンポジウム, 釧路市生涯学習センター, 釧路市, 2015/11/27.

豊島勇大, 橋口博樹

超幾何関数の二次ラプラス近似による Wilks のラムダ統計量の非心分布のサドルポイント近似, 日本計算機統計学会 第29回大会, 山梨県立図書館, 甲府市, 2015/05/14.

松原秀高, 橋口博樹

2) ウィシャート行列の比に関する固有値分布の近似について, 日本計算機統計学会 第29回大会, 山梨県立図書館, 甲府市, 2015/05/14.

T. Kuwabara and H. Hashiguchi

Approximate gamma distributions for eigenvalues of a complex nonsingular and singular Wishart matrices, 2015 International Workshop for JSCS 30th Anniversary In Okinawa, OIST, Okinawa, 2015/10/31.

中川重和, 橋口博樹, 小野陽子

標本重相関係数分布の密度関数と HG 法, 日本数式処理学会, 筑波大学, つくば市, 2015/06/05.

豊島勇大, 橋口博樹

合流型超幾何関数に対するラプラス近似の拡張, 日本計算機統計学会第28回シンポジウム, 沖縄科学技術大学院大学, 沖縄県恩納村, 2014/11/14.

橋口博樹, 中川重和

標本相関係数の分布の正確計算について, 日本計算機統計学会第28回シンポジウム, 沖

縄科学技術大学院大学，沖縄県恩納村，  
2014/11/14 .

園田健人，橋口博樹

Beltrami operator の基本対称式表現とジャック多項計算，日本計算機統計学会第28回シンポジウム，沖縄科学技術大学院大学，沖縄県恩納村，2014/11/14 .

N. Niki, Y. Ono, H. Hashiguchi

International Conference on Computational Statistics, COMPSTAT 2014, 5th IASC World Conference, Geneva, 2014/8/19.

H. Hashiguchi, S. Nakagawa

Holonomic gradient method for the distribution of the sample correlation coefficient under normal population, Workshop on computational and algebraic methods in statistics, Sanjo Conference Hall, The University of Tokyo, Japan, 2015/3/3.

加藤仁志，橋口博樹

固有値分布のカイ二乗近似と母固有値の信頼区間の構成について，日本計算機統計学会第27回大会，弘前大学，弘前市. 2014/5/17.

宮武拓登，橋口博樹

標本相関係数の分布に関する分位値の正確計算，日本計算機統計学会第27回大会，弘前大学，弘前市 . 2014/5/17.

Hiroki Hashiguchi

On a Confidence Interval of Population Eigenvalues, Ishigaki International Conference on Modern Statistics Theories, Practices, and Education in the 21st Century, ANA InterContinental Ishigaki resort at Ishigaki, 2014/11/8.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.tus.ac.jp/fac\\_grad/p/achievement.php?1f6e](http://www.tus.ac.jp/fac_grad/p/achievement.php?1f6e)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

橋口 博樹 (HASHIGUCHI HIROKI)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：50266920

### (2) 研究分担者

中川 重和 (NAKAGAWA SHIGEKAZU)

倉敷芸術科学大学・産業科学技術学部・教授

研究者番号：90248203

### (3) 連携研究者

橋口 (小野) 陽子 (ONO YOKO)

横浜市立大学・国際総合学部・准教授

研究者番号：60339140