

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25381184

研究課題名(和文) 数学的表現のふり返りと修正を意識した問題解決的指導に関わる基礎的研究

研究課題名(英文) A fundamental study on teaching through problem solving with looking back and modification of solvers' representations

研究代表者

山田 篤史 (YAMADA, Atsushi)

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：20273823

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、問題解決的な授業で、解決者がどのように数学的表現を構成・修正・洗練するかについて検討することを目的としている。

結果として、第1に、国内外の文献レビューより、我が国の定型的表現の早期導入の傾向と、表現の抽象化の2つの機能から導出される2つの表現指導の在り方を指摘した。第2に、小学校の計算指導に着目し、児童のインフォーマルな操作的表現が集団的な振り返り活動を通して数量関係を反映する表現に移行するプロセスとその指導上の困難点を指摘した。第3に、数学的説明に関わる授業を分析し、説明的表現を書き、振り返りの中でそれらを修正・洗練していく指導において有望と目される3つの活動を指摘した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to investigate how problem solvers construct, modify, and refine their mathematical representation during the teaching through problem solving with looking-back activities.

The results are as follows: firstly, reviewing precedent studies, the tendency of the early introduction of conventional representations in Japan and two teaching approaches derived from two functions of abstraction of representation were pointed out; secondly, focusing on the teaching of calculation in elementary first grade, the process that children's informal-operative representations shift to relational-static ones through looking-back activities was observed in a classroom, and several difficulties of the representational shift were pointed out; thirdly, analyzing a series of classes for improving mathematical explanation, three promising activities for constructing, modifying, and refining children's mathematical representation through looking-back activities were pointed out.

研究分野：数学教育学

キーワード：問題解決 振り返り 表現

## 1. 研究開始当初の背景

数学教育学研究において、問題解決と表現という研究分野は、80年代初頭から互いに影響を及ぼし合いながら研究成果を蓄積してきたが、その当初は基礎的研究が多かった。ところが、米国では2000年にNational Council of Teachers of Mathematicsの*Principles and standards for school mathematics*がプロセス・カリキュラムの1つとして「表現(representation)」を設定して以来、また我が国では近年の学習指導要領が表現力の育成を打ち出して以来、研究は実践的な方面にもシフトしていくことになる。

ところが、我が国の表現分野の実践的研究の焦点は、旧来より式やグラフ等の伝統的な規約的表現に偏る傾向があった。数学的な問題解決には、伝統的な式やグラフだけが表現として介在するわけではない。自力解決の場面で自発的な表現を促した場合など、学習者が構成する表現は様々だろうし、最初から定型的・規約的なものや数学的構造を反映したものでない可能性も高いはずである。そもそも、問題解決的な指導で、学習者は、未習の学習内容の問題に対して最初から問題構造を完璧に反映した図や式(我々教師が最終形として望む伝統的な規約的表現)を構成できることが期待されているわけではないはずなのである。

むしろ、現実的な問題解決的指導を考える場合、学習者が最初に構成した素朴な表現を「ふり返り」、それをクラスの中で「洗練・修正」しつつ、問題に対する理解やその解決を進展させていくことこそが、表現を意識した重要なプロセスになるはずなのである。

一方、問題解決過程で解決者が構成・修正する表現に着目した先行研究は、これまで個人の解決過程を記述するものが多く、特に、我が国の「問題解決的な授業」の文脈へ統合される形で研究されるにまでは至っていない点が課題であった。

## 2. 研究の目的

数学的問題解決研究では、当該の問題解決で標準的に利用される規約的表現が未習の場合、解決者がどのように独自の表現を構成して解決に対処しようとするかが問題になる。特に、従来、個別の解決過程で焦点であった初期表現の構成過程や振り返り等を通じた表現の修正・洗練過程などを、授業の文脈で検討することが課題になっている。

そこで、本研究では、[目的1]問題解決的な指導で学習者が数学的表現を構成するプロセスの実態の一部を明らかにし、[目的2]そうした表現のふり返りと修正が個人や集団の問題解決の進展に果たす役割を検討しつつ、[目的3]数学的表現の修正・洗練を助長するための指導の在り方について検討することを目的とする。

## 3. 研究の方法

第一に、先行研究や指導事例集などをもとに、問題解決的指導において児童・生徒が「どのような」表現を構成するかについて事例を収集し、それをもとに幾つかの単元や問題に焦点を絞り、指導事例集・商業雑誌における授業記録、また授業観察をもとにして、どのような表現を「どのように」構成するかについて、実態を明らかにしていく。

第二に、そうした授業記録や観察された授業のデータから、特定の個人が構成した表現を振り返り修正するプロセスが授業における問題解決の進展に果たす役割について、分析的に検討を加える。

最終的に、その結果を踏まえ、問題解決・授業デザインに関する先行研究を頼りに、数学的表現の修正・洗練を助長するための指導の在り方について検討を加えることにする。

## 4. 研究成果

(1) 初年度は、[目的1]に関わって、問題解決的な指導で学習者が数学的表現を構成するプロセスの実態の一部を明らかにするために、形式的・規約的表現や自然言語以外に、児童・生徒がどのような表現を構成するのかについて、国内外の文献をレビューした。

この作業において、National Council of Teachers of Mathematics (2000)が出版する*Principles and standards for school mathematics*及びそれに関わって発刊されている文献群では、低学年で児童独自の表現をさせることが推奨されているのに対して、国内文献群では、帯図・線分図や説明における話形など、教科書に見られる定型的表現を早期に与えて、その問題解決における利用の仕方を指導する傾向が見いだされた。ただし、我が国の教科書や授業記録の中には、そうした定型的な図的表現を、一般的には抽象化と呼ばれる思考・表現過程と結びつける傾向も垣間見られた。そこで、表現の抽象化が問題解決に果たす役割についての先行研究を踏まえ、[目的3]の一部を先取りする形で、問題解決における表現の抽象化の2つの機能に着目し、次の2つの表現指導の在り方を指摘した。すなわち、捨象的機能の側面からは「余情情報を容認して図の生成を積極的に行わせることから始め、次第に、余剰情報や捨象しても部分的解決に成功する情報は何かを考えさせること」、一般化機能の側面からは「類推・統合的な考え方の誘発や類似問題の探索といった活動を盛り込むこと」という2点である。

なお、これらの成果は、下記〔雑誌論文〕にまとめられている。

(2) 次年度は、[目的1]及び[目的2]に関して具体的な単元に焦点を当てるため、小学校

低学年の加減の計算指導における表現構成と振り返りを伴う表現の修正プロセスに着目した。

小学校低学年の加減の計算指導で、児童は、計算の具体的な操作の実演やそれらの操作系列を図示する情景図・手続き図のような表現、謂わば「インフォーマルな表現」を構成しがちだが、そうした表現は問題場面の数量関係を静的・構造的に表現できるとは限らない。それ故、集団的な振り返り活動を通して、そうした数量間の静的関係を反映した構造図のような図への移行を促す必要が生ずるのだが、問題は、その直接的な移行は非常に難しいと予想される点である。そこで、小学校低学年の加減の計算指導に関わる問題解決的な授業のデータを観察し、先ずは、そうした困難性の傾向を直接確認することができた。また、同時に、教師による上記2種類の図の提示に伴う、ある児童の個人的な図の修正活動に着目し、クラスにおける個人の図（表現）に対する振り返り及び修正と集団の問題解決の進展との関係を検討した。そこでは、クラスの多くが、計算の仕方を操作的になぞり計算結果を求める（確認する）ための図を構成していたのだが、黒板での説明を意識させるようにすると、一部の児童には、図の目的・役割に対する意識の変化をもたらされることになり、積極的な図の修正に繋がることになったのである。これは、問題理解や求答のための操作的でその場限りでしか利用できない図が、他者に対しての「説明のため」という意識付けが、一部の児童の図を修正させるに至らしめ、最終的には、静的・構造的な「部分-全体関係」の図のクラス全体での共有という形へと繋がっていく可能性を示唆するものである。

なお、これらの成果は、下記〔雑誌論文〕にまとめられている。

(3) 2年度目には、上記(2)の研究に付随して、また昨年度の文献レビューを利用して、授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組みについて検討した。

枠組みの基本的な構成は、中原(1995)が研究の対象とした表現に加えて、話し言葉やジェスチャーを枠組みに含めた上で、中原の表現様式と Webb et al.(2008)の表現の3つの様式(フォーマル、プリフォーマル、インフォーマル)を2次的に位置づけるというモデルになっている。この枠組みにより、インフォーマルな表現については、中原の5つの表現様式と、Webb et al.のインフォーマル・プリフォーマルという2つの表現様式から、2次元に捉えられることとなり、現時点では10のカテゴリーから捉えられることとなった。この詳細については、下記の〔雑誌論文〕

にまとめられているが、そこでは、典型的なインフォーマルな表現の例が、フォーマルな表現との対置も意識されつつ挙げられている。また、この枠組みを使ってインフォー

マルな表現が有効に活用されている正木(2009)の実践を分析することで、この枠組みが授業におけるインフォーマルな表現の生起や変換の様子を具体的に記述しようということも例証されている。

(4) 最終年度は、上記(1)～(3)の検討を踏まえて[目的3]を達成するために、数学的説明力の育成を目指して設計・実施された授業を分析し、子どもたちはどのような説明的表現を構成し、修正・洗練する活動に取り組むことができるかについて検討した。授業分析の結果、説明的表現をかく指導で有望な活動としては、初期段階では「説明の冗長さや巧拙を考慮せず、初期表現に新情報を付け加えていくような活動」が、次の段階では「初期段階の冗長性を含む説明表現から、過剰情報を削除していく活動」が、そして、より一般的な教授方略を考える立場からは、「説明表現の例を比較・批評する活動」が、それぞれ有効と目される活動として指摘された。

なお、これらの成果は、下記〔雑誌論文〕にまとめられている。

#### 引用文献

- 正木孝昌(2009).『算数の授業で教えるはいけないこと、教えずにはいけないこと』.名古屋:黎明書房.
- 中原忠男(1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』.東京:聖文社.
- Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4件)

山田篤史・片野慶子(2015).「算数授業の振り返り活動を通じた説明表現の構成と修正の指導に関する一考察」.愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 査読無, vol.57, 29-38.

清水紀宏・山田篤史(2015).「算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組みについて」.全国数学教育学会『数学教育学研究』, 査読有, vol.21(2), 89-102.

山田篤史(2014).「問題解決的な授業における数学的表現の使用とその修正:考え方の説明における図の場合」.愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 査読無,

vol.56, 37-44.

山田篤史(2013).「問題解決指導における数学的表現の修正とその役割:表現の抽象化に着目して」.愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』,査読無,vol.55, 23-29.

〔学会発表〕(計 1件)

清水紀宏・山田篤史(2015).「算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組みについて」.全国数学教育学会第41回研究発表会(Jan.31 - Feb.1, 東広島市:広島大学教育学部).

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

山田 篤史 (YAMADA, Atsushi)  
愛知教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 20273823

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

清水 紀宏 (SHIMIZU, Norihiro)  
福岡教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 50284451

### (4)研究協力者

片野 慶子 (KATANO, Keiko)