

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 29 日現在

機関番号：16102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25381204

研究課題名(和文) 算数教育における割合に関する数理構造の理解を促進するメカニズムに関する研究

研究課題名(英文) Study on mechanism to promote understanding of the mathematics structure about ratio in the arithmetic education

研究代表者

坂井 武司 (SAKAI, Takeshi)

鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

研究者番号：30609342

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、割合に関する認知としての概念的知識と手続き的知識を測定する調査問題及び割合に関する心的要因としての信念と態度を測定する尺度の開発を行った。また、割合に関する数理構造の理解の水準及び段階区分を行い、割合に関する知識の変化のメカニズムを明らかにした。さらに、割合に関する概念的知識と手続き的知識を統合する授業の設計・実践を行い、割合に関する認知と信念・態度の向上に効果あることを明らかにした。その背景として、割合に関する基礎・基本としての知識と活用としての概念的知識・手続き的知識は、直接的に影響すること及び割合に対する信念は態度を通して割合に関する認知に相互に影響することを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this study, we developed the investigation problem to measure conceptual knowledge and procedural knowledge as the recognition about ratio and the standard to measure belief and attitude as the mental factor about it. In addition, we classified standards and stages for the understanding of mathematics structure about ratio and clarified the mechanism of the change of the knowledge about it. Furthermore, we performed the design and the practice of the lesson to integrate procedural knowledge with conceptual knowledge about ratio and clarified that this lesson practice was effective for the improvement of recognition, belief and attitude about it. As the background, we clarified that the knowledge as the basics, conceptual knowledge and procedural knowledge as the utilization about the ratio influenced directly and that belief toward ratio and recognition about it influenced mutually through attitude toward it.

研究分野：数学教育

キーワード：教育学 教科教育学 算数教育 割合指導 数理構造 信念 態度

1. 研究開始当初の背景

全国学力・学習状況調査報告書において、A問題の割合に関する内容は、継続的な課題が見られる内容として取り上げられている。特に、B問題の割合の活用に関する正答率は低い。また、割合に関する単元は、児童にとって理解しにくいと感じている教師も多い。したがって、割合に関する授業実践の改善が急務であると言える。これまでの研究より、割合に関する数理構造の理解を促進する教授法の構築において、概念的知識と手続き的知識の両側面からのアプローチと、認知に影響する割合に対する信念や態度といった心的要因の側面からのアプローチが必要であると考えられる。そこで、児童の学力の向上は、授業実践の質の向上に負うところが大きいことを鑑み、これまでの研究成果を踏まえ、本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、次の4点を研究の柱とし、授業実践の改善を図ることである。児童の割合に関する認知を測定する調査問題を開発・実施し、割合に関する数理構造の理解の水準及び段階を明らかにする。児童の割合に関する心的要因を測定する尺度を開発する。割合に関する数理構造の理解を促進する教授法の構築・実践を行う。割合に関する認知と心的要因のメカニズムを明らかにする。

3. 研究の方法

図1の本研究の全体構想に基づき、研究の方法を以下に示す。

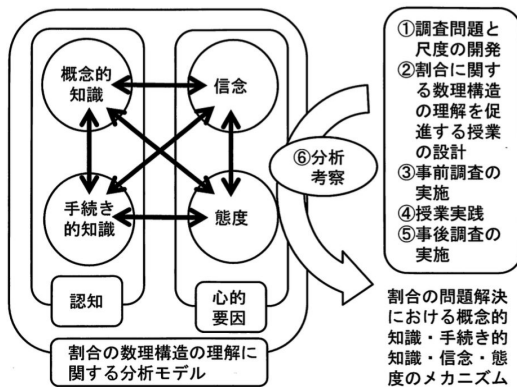


図1 本研究の全体構想

割合に関する認知を測定する調査問題及び割合に関する心的要因を測定する尺度を開発する。開発した調査問題及び尺度を用いて調査を実施し、調査結果の分析と考察から、割合に関する数理構造の理解の水準及び段階を明らかにする。また、割合に関する数理構造の理解を促進する教授法を構築し、研究協力校において第5学年の児童を対象に実践する。事前・事後調査を行い、その分析と考察から、構築した授業の有効性を検証するとともに、事後調査の結果を用いて、割合の

数理構造の理解に関する分析モデルを基に、割合に関する認知(概念的知識と手続き的知識)と心的要因(信念と態度)のメカニズムを明らかにする。

4. 研究成果

(1) 割合に関する認知を測定する問題の開発

割合に関する認知を測定する問題は概念的知識と手続き的知識の問題に区分され、さらに割合、比較量、基準量を求める問題に区分される。割合に関する概念的知識の問題は、割合、比較量、基準量を求める問題が各6問、割合に関する手続き的知識の問題は、割合、比較量、基準量を求める問題が各12問で構成されている。スケログラム分析により妥当性が保証された調査問題の内、問題例として、割合に関する概念的知識と手続き的知識の問題(Sakai, T. and Takahashi, T., 2015a)の割合を求める問題を図2, 図3に示す。

〔問題例〕
くじ引きで、当たりくじの数とはずれくじの数を合わせた数を全体のくじの数とします。くじ引きで、当たりくじが出やすいことを当たりやすいと言います。当たりくじとはずれくじの入った2つのくじA, Bがあります。
・くじAとくじBの全体のくじの数は同じです。
・くじAは、くじBより当たりくじが多く入っています。
・くじBは、くじAよりはずれくじが多く入っています。
くじを1本ずつ引くとき、くじAとくじBでは、どちらが当たりやすいですか。または、くじAもくじBも同じだけ当たりやすいですか。正しいと思う の中に をつけなさい。ただし、問題の中には、全ての に をつける問題もあります。

くじAの方が 当たりやすい くじAもBも同じ だけ当たりやすい くじBの方が 当たりやすい

図2 概念的知識の問題

〔問題例〕
くじ引きで、当たりくじの数とはずれくじの数を合わせた数を全体のくじの数とします。くじ引きで、くじを1本引くときの当たりくじの出やすさを当たりやすさと言います。くじ引きで、当たりやすさが高いことを当たりやすいと言います。当たりくじとはずれくじの入った2つのくじA, Bがあります。
・くじAは、全体のくじの数が5本、当たりくじの数が3本です。
・くじBは、全体のくじの数が5本、当たりくじの数が1本です。
くじを1本ずつ引くとき、くじAとくじBでは、どちらが当たりやすいですか。またはくじAもくじBも同じだけ当たりやすいですか。正しいと思う の中に1つ をつけなさい。

くじAの方が 当たりやすい くじAもBも同じ だけ当たりやすい くじBの方が 当たりやすい

図3 手続き的知識の問題

(2)割合に関する数理構造の理解の水準及び段階

開発した割合に関する認知を測定する6つの調査問題を用いて、第5・6学年の児童を対象に調査を実施した。調査結果のスケログラム分析及びプロトコル分析から、表1、表2に示す割合に関する数理構造の理解の水準及び段階を明らかにした(Sakai, T. and Takahashi, T., 2015a)。

表1 割合に関する概念的知識の水準及び段階区分

水準	段階	割合	比較量	基準量
0				
1	1A	問題2 問題1 問題3 問題5	問題2 問題1	問題2 問題1
	1B	問題6	問題6 問題4	問題6 問題3
2		問題4	問題5 問題3	問題5 問題4

表2 割合に関する手続き的知識の水準及び段階区分

水準	段階	割合	比較量	基準量
0				
1	1A	問題1 問題4	問題1 問題4 問題11 問題9 問題10 問題8 問題7	問題2 問題5 問題7 問題11 問題8 問題9 問題10 問題12
	1B	問題6 問題3 問題12	問題2 問題5	問題3 問題6
	1C	問題2 問題8 問題9 問題7		
2		問題5 問題10 問題11	問題6 問題12 問題3	問題1 問題4

(3)割合に関する知識の変化のメカニズム

表1、表2における各水準及び段階に属する児童のプロトコルを、命題論理と述語論理を用いて詳細に分析・考察を行った結果、図4及び次の①～⑦に示す割合に関する知識の変化のメカニズムを明らかにした(Sakai, T. and Takahashi, T., 2015a)。

3つの状況それぞれにおいて、割合にする概念的知識と手続き的知識が加法的な考えの下で関連付けられる。

割合に関する状況を中心に、比較量に関する状況または基準量に関する状況と統合される。

3つの状況が加法的な考えとして統合さ

れる。

児童の考え方の構造的変化が起こる。

3つの状況それぞれにおいて、割合に関する概念的知識と手続き的知識が乗法的な考えの下で関連付けられる。

割合に関する状況を中心に、比較量に関する状況または基準量に関する状況と統合される。

3つの状況が乗法的な考えとして統合される。

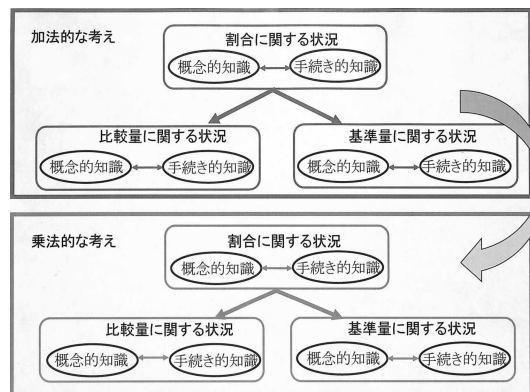


図4 知識の変化のメカニズム

(3)割合に関する心的要因を測定する尺度の開発

割合に関する心的要因を、割合に対する信念と態度の2つの側面から捉え、因子分析により抽出した割合に対する信念と態度の尺度の項目(坂井武司, 高橋正, 2015b)を表2、表3に示す。

表2 割合に対する信念の項目

	事項	調査項目
1	積極的関与	割合の学習では、身の回りから割合を見つけることが大切だ。
2	理由付け	割合の学習では、どうしてそうなるのか、理由を考えることが大切だ。
3	解法の見通し	割合の問題をとくとき、とき方を見通しをもつことが大切だ。
4	発表	割合の学習では、図をもとに説明することが重要だ。
5	解の見積り	割合の問題では、何倍になるか(割合)を見積もることが重要だ。
6	問題場面の図示	割合の問題では、問題場面を図に表すことが重要だ。
7	ひらめき	割合の問題をとくとき、ひらめき大切だ。
8	問題場面の把握	割合の問題では、もとにする量は何であるかを考えることが重要だ。
9	最良化	割合の学習では、よりよい考え方を求めることが大切だ。
10	解法の多様性	割合の問題は、色々なとき方がある。
11	数量の置換	割合の問題では、もとにする量を1とみて考えることが重要だ。
12	学習の多様性	割合の学習は、日常生活に役立つ。
13	考え方の	割合の問題では、もとにする量と

	多様性	比べる量を入れかえた場合についても考えることが重要だ。
14	論理的な分析	割合の学習では、図をもとに、割合、比べる量、もとにする量の関係を調べることが重要だ。
15	情報の統合	割合の学習では、割合、比べる量、もとにする量を関連づけて考えることが重要だ。
16	仮定	割合の学習では、割合が2倍や半分と仮定して考えることが重要だ。
17	多様な見解の受容	割合の学習では、色々な意見や考えを認めることが大切だ。
18	重要性	割合は、重要だ。

表3 割合に対する態度の項目

事項	調査項目	
1	解法の多様性	割合の学習では、色々なとき方をしようとする。
2	多様な見解の受容	割合の学習では、色々な意見や考えを認めようとする。
3	積極的関与	割合の学習では、身の回りから割合を見つけようとする。
4	内容の把握	割合の学習では、問題の内容をしっかりとらえようとする。
5	既習内容との関連	割合の学習では、すでに学習した内容とのつながりを考えようとする。
6	解法の見通し	割合の問題をとくとき、とき方を見通しをもとうとする。
7	理由付け	割合の学習では、どうしてそうなるのか、理由を考えようとする。
8	発表	割合の学習では、図をもとに説明しようとする。
9	結果と過程	割合の問題をとくとき、答えまでの道すじを確かめようとする。
10	論理的な分析	割合の学習では、図をもとに、割合、比べる量、もとにする量の関係を調べようとする。
11	学習の有用性	割合の学習では、日常生活とのつながりを考えようとする。
12	最良化	割合の学習では、よりよい考え方を求めようとする。
13	方法の最適化	割合の問題をとくとき、どの方法が最も適しているかを考えようとする。
14	解の見積り	割合の問題をとくとき、何倍になるか(割合)を見積もろうとする。
15	仮定	割合の学習では、割合が2倍や半分と仮定して考えようとする。
16	方法の可能性	割合の問題をとくとき、色々な方法を考えようとする。
17	ひらめき	割合の問題をとくとき、ひらめきを大切にしようとする。
18	問題の志向	割合の問題をとくのが好きだ。
19	考え方への志向	割合を使った考え方が好きだ。
20	数量の置換	割合の問題をとくとき、もとにする量を1とみて考えようとする。
21	問題場面の把握	割合の問題をとくとき、もとにする量が何であるかを考えようとする。

		する。
22	問題場面の図示	割合の問題をとくとき、問題場面を図で表して考えようとする。

割合に対する信念と態度に関する各項目には、図5のような5段階評定を付した。

まったくそう 少しさう 半分くらい かなりそう 非常にそう
思っていない 思っている そう思っている 思っている 思っている



図5 各項目の5段階評定

(4) 割合に関する数理構造の理解を促進する教授法

割合に関する数理構造の理解を促進する教授法として、一般化の過程と反復過程を考慮し、割合に関する概念的知識と手続き的知識を統合する授業を設計し、授業実践を行った(坂井武司 他3名, 2015c)。授業設計の概要を表4に、単元指導計画の一部を表5に示す。

表4 授業設計の概要

2つの数量の関係の把握
2つの数量の関係の把握：「高さ比べ」 割合、比較量、基準量を求める他の問題場面の解決 倍、百分率、歩合を用いた問題場面の解決 「AはBの何倍」以外の文章表現を用いた問題場面の解決 3つの公式の一般化 割合の適用(割増と割引)
2組の数量の関係の比較
2組の数量の関係の比較：「当たりやすさ比べ」 割合のグラフ

表5 単元指導計画

時間	反復過程	概念的知識と手続き的知識の具体例
1 ①		C: 比較の場面把握 P: 記号(言葉, +, -, ×, ÷)の選択の予想 RP: 文章による(主観的な)表出 P: 記号(言葉, +, -, ×, ÷)による関係付け RP: 分類による表出 C: 大小, 差, 割合により関係付ける考え方
2 ①		RP: 双方向の見方を示した関係図による表出 P: ×, ÷による関係付け RP: 双方向の見方を示した関係図による多様な表出 C: 割合, 比較量, 基準量を求める3つの式 RP: 比の関係図による表出 P: 割合, 比較量, 基準量の各々を求める立式
3 ①		

(5) 割合に関する認知に対する効果

割合に関する概念的知識と手続き的知識を統合する授業実践の割合に関する認知に対する効果として、次の2点を明らかにした(坂井武司 他3名, 2015c)。

割合に関する教科書で学習した知識の獲得2つの数量の関係を把握する場合に関して児童が身に付けた知識は、割合に関する教科書で学習した知識という意味において、基礎・基本と考えることができる。そこで、教科書から、割合、比較量、基準量の3つの状況に関して各1題を選択し作成した基本問題を用いて事後調査を行った。各問題の正答率は、割合に関して94.4%、比較量に関して98.6%、基準量に関して87.5%である。全国学力・学習状況調査において、同様のタイプの問題の正答率は60%程度である。したがって、本授業実践は、基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の獲得に効果がある。

活用としての概念的知識と手続き的知識の向上

2組の数量の関係を比較する場合は、活用と考えることができる。そこで、割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査問題を用いて事前・事後調査を行った。割合に関する概念的知識の3つの状況の得点、それらを総合した割合に関する概念的知識の得点、割合に関する手続き的知識の3つの状況の得点、それらを総合した割合に関する手続き的知識の得点の全てにおいて、事前調査と事後調査の平均間に有意な差があった。したがって、本授業実践は、活用としての割合に関する概念的知識と手続き的知識の向上にも効果がある。

(6) 割合に関する3つの知識の関係

活用としての割合に関する概念的知識の得点を X_1 、活用としての割合に関する手続き的知識の得点を X_2 、基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の得点を X_3 とし、3つの知識の得点に関して、重回帰分析を行った。3つの知識の得点 X_1 、 X_2 、 X_3 のそれぞれを従属変数とした場合の相関係数、標準偏回帰係数、寄与率、重相関係数をまとめ、表6、表7、表8に示す。

表6 X_1 を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_2	0.243*	0.322	7.820
X_3	0.243*	0.322	7.805
重相関係数	0.395*		

表7 X_2 を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_1	0.242*	0.322	7.801
X_3	0.247*	0.325	8.029
重相関係数	0.398*		

表8 X_3 を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_1	0.242*	0.322	7.787
X_2	0.247*	0.325	8.030
重相関係数	0.398*		

標準偏回帰係数をパス係数とし、パス解析を行った。図6に作成したパスダイアグラムを示す。

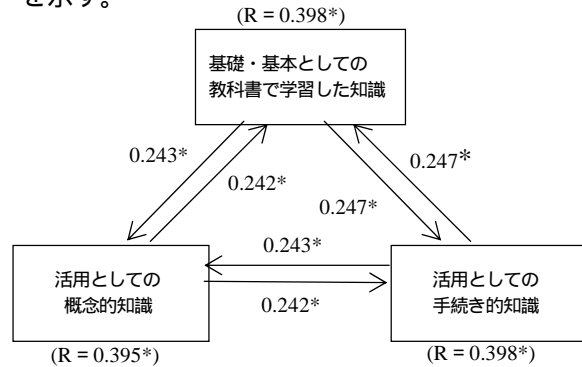


図6 3つの知識に関するパスダイアグラム

これらの結果から、割合に関する3つの知識の得点は、互いに弱い相関を持ちながら直接的に影響し合っていることを明らかにした(坂井武司 他3名, 2015c)。

(7) 割合に関する心的要因に対する効果

割合に対する信念と態度の尺度の項目を用いて事前・事後調査を行った。割合に対する信念と態度の事前調査と事後調査の得点に関してt検定を行った結果、事前調査と事後調査の平均間に有意な差があった。したがって、本授業実践は、割合に関する認知の向上だけでなく、割合に対する信念や態度のような割合に関する心的要因の向上にも効果があることを明らかにした(坂井武司 他2名, 2016)。

(8) 割合に関する認知と心的要因の関係

割合に関する認知の得点を Y_1 、割合に対する信念の得点を Y_2 、割合に対する態度の得点を Y_3 とし、3つの知識の得点に関して、重回帰分析を行った。3つの知識の得点 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 のそれぞれを従属変数とした場合の相関係数、標準偏回帰係数、寄与率、重相関係数をまとめ、表9、表10、表11に示す。

表9 Y_1 を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
Y_2	0.144	0.296	4.271
Y_3	0.275*	0.355	9.756
重相関係数	0.375*		

表10 Y_2 を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
Y_1	0.115	0.296	3.410
Y_3	0.509*	0.550	27.950
重相関係数	0.560*		

表 11 Y₃を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
Y ₁	0.210*	0.355	7.462
Y ₂	0.487*	0.550	26.777
重相関係数	0.585*		

標準偏回帰係数をパス係数とし、パス解析を行った。図7に作成したパスダイアグラムを示す。

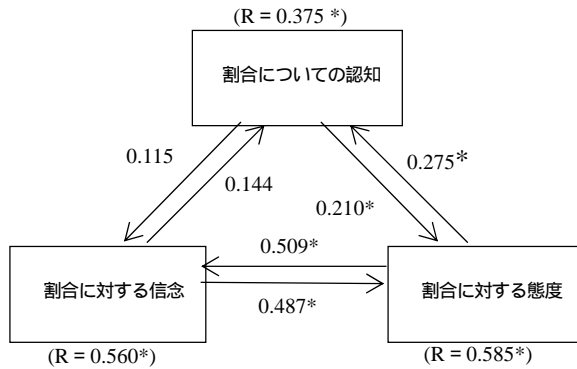


図7 認知と心的要因のパスダイアグラム

これらの結果から、割合に関する認知と心的要因のメカニズムとして、割合に対する信念と割合に関する認知は、割合に対する態度を通して、相互に影響し合うことを明らかにした(坂井武司 他2名, 2016)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Sakai, T. & Takahashi, T., Logical analysis of ratio inference by children, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 査読有, e-2015-20, pp.1-23, 2015a.

坂井武司・高橋正, 算数教育における割合に対する信念・態度の測定尺度の開発, 甲南大学紀要知能情報学編, 査読有, Vol.8, No.1, pp.19-31, 2015b.

坂井武司・高橋正・齋藤昇・廣瀬隆司, 割合に関する概念的知識と手続き的知識の統合, *数学教育学会誌*, 査読有, Vol.56, No.1・2, pp.15-26, 2015c.

坂井武司・高橋正・廣瀬隆司・齋藤昇, 割合の学習における基準量の認識に関する研究 - 双方向の見方に関して -, *数学教育学会誌*, 査読有, Vol.56, No.1・2, pp.61-73, 2015d.

坂井武司・齋藤昇・高橋正・廣瀬隆司, 割合についての児童の認識に関する研究, *数学教育学会誌*, 査読有, Vol.53, No.3・4, pp.97-106, 2013.

[学会発表](計6件)

坂井武司・廣瀬隆司・高橋正, 割合に関する

る認知と情意の関係, *数学教育学会*, 筑波大学筑波キャンパス, *数学教育学会誌臨時増刊 2016年度数学教育学会春季年会発表論文集*, pp.203-205, 2016.

坂井武司・高橋正・廣瀬隆司, 割合に関する児童の推論の論理的考察, *全国数学教育学会*, 広島大学教育学部, 2015.

坂井武司・高橋正・廣瀬隆司, 割合に関する概念的知識と手続き的知識を統合する授業の構築, *数学教育学会*, 明治大学駿河台キャンパス, *数学教育学会誌臨時増刊 2015年度数学教育学会春季年会発表論文集*, pp.66-68, 2015.

坂井武司, 割合に関する概念的知識の尺度の開発, *日本数学教育学会*, 山梨大学人間科学部附属小学校, *日本数学教育学会誌臨時増刊第95回大会特集号*, p.159, 2013.

坂井武司, 割合に関する手続き的知識の尺度の開発, *日本数学教育学会*, 山梨大学人間科学部附属小学校, *日本数学教育学会誌臨時増刊第95回大会特集号*, p.160, 2013.

坂井武司・廣瀬隆司, 割合についての概念的知識と手続き的知識の関係に関する研究, *九州大学箱崎文系キャンパス*, *日本数学教育学会誌臨時増刊第95回大会特集号*, p.160, 2013.

6. 研究組織

(1)研究代表者

坂井 武司 (SAKAI, Takeshi)

鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

研究者番号：30609342

(2)研究分担者

廣瀬 隆司 (HIROSE, Takashi)

四天王寺大学・教育学部・教授

研究者番号：50452660