

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：17101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25381208

研究課題名(和文) 算数・数学の授業における子どもによる表現とその洗練プロセスに関する研究

研究課題名(英文) A study on students' own representation and their refinement processes in arithmetic and mathematics classes

研究代表者

清水 紀宏 (Norihito, Shimizu)

福岡教育大学・教育学部・教授

研究者番号：50284451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、算数や数学の授業における子供や教師によるインフォーマルな表現を同定し、数学学習におけるそれらの役割を明らかにすることである。

研究の結果、インフォーマルな表現を捉える理論的枠組みを構築し、その枠組みに基づき、図形概念形成や数表の法則発見などの授業を対象としてインフォーマルな表現の果たす役割を明らかにした。また、子供のインフォーマルな表現をクラス全体の議論の遡上にのせる構えを教師が持つことの重要性や、そのような授業を実現するための教材研究の重要性を指摘した。

研究成果の概要(英文)： The purpose of this study is to identify informal representation by students and teachers in arithmetic and mathematics lessons and to clarify their roles in mathematics learning.

As a result of the study, we constructed a theoretical framework to capture informal representation and clarified the roles played by informal representation in classes for constructing figure concepts and discovering the numerical relations in multiplicative table, using the framework. We pointed out the importance that teachers have a positive stance to take the students' informal representation as the subject of classroom discussion and they examine and analyze the teaching materials to realize such classes.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 表現

1. 研究開始当初の背景

数学教育学において、表記・表現の研究は古くからなされている。日本数学教育学会が編集した『数学教育学研究ハンドブック』においても、「表記・表現」というチャプターが設定され、先行研究がまとめられている。そのチャプターを担当した金本は、数学教育学研究における表記・表現の研究成果は「A 表記・表現そのものに関する研究」「B 表記・表現の教授学習過程や学習活動における理解と活用に関する研究」「C 実践的研究」の3つに大別されるとしている(金本,2010)。これらの研究は、数学教育学研究において一定の役割を果たしてきた。例えば、中原(1995)の表現体系(「記号的表現」「言語的表現」「図的表現」「操作的表現」「現実的表現」)に関する研究(中原,1995)は、理論研究においても実践的研究においても多く参照されている。海外の数学教育学研究に目をむければ、International Group for the Psychology of Mathematics Education では、古くから“Representations”という作業研究グループが組織されている。また、米国の National Council of Teachers of Mathematics(以下、NCTM)が提唱する算数・数学カリキュラム(NCTM, 2000)においては、「数」「図形」等の「内容のスタンダード」と共にそれらを横断する「プロセスのスタンダード」の1つとして「表現(representation)」が設定されている。また、NCTMの2001年報のタイトルは「学校数学における表現の役割」というものであり、Goldin,G.や Kamii,C.といった著名な研究者もこの本のチャプターを担当している。

他方、我が国の数学教育の動向としては、平成3年に改訂された学習指導要録において、従来の「技能」を包含するものとして「表現・処理」という観点が算数科・数学科で設定された。2008年には学校教育法の改訂により、学力の3要素の一つとして、「知識・技能」「関心意欲」と共に「思考力・判断力・表現力」の育成が重視されることとなった。我が国の小学校や中学校の算数・数学教育において「思考力・表現力の育成」は「言語活動の充実」とならんで非常に重視されているといえる。しかしながら、小学校や中学校の算数・数学の授業を観察しても、中原の表現体系(中原,1995)などのこれまでの数学教育学の研究がある程度は活かされているものの、依然として、個々の子ども(多くの場合、クラスで数学のよくできる子ども)の「解法やアイデアの発表会」に終始している授業が少なくない。文部科学省は「学力テスト」に関連する「授業アイデア例」等において、子どもに完全な表現を期待するというよりはむしろ不十分な表現を集団で洗練させていくことを提案しているけれども、多くの教師にとっては授業を円滑に進めることが最優先課題であり、そのことが「表現が洗練された正しい解法」を取り上げてしまうことにつ

ながる一つの要因と思われる。「思考力・表現力の育成」や「言語活動の充実」を目指すときに、こうした状況は打破されなければならない。そのためには、フォーマルなできあがった表現のみを取り扱うのではなく、子どもたち自身によるインフォーマルな表現を積極的に取り上げ、それらを洗練させていくというプロセスを重視することが、算数・数学の授業が豊かになることに寄与することを、理論的・実証的に明らかにする必要があると考える。

2. 研究の目的

以上で述べたことを背景として、本研究は次の2点を目的とした。

算数や数学の授業における子どもや教師によるインフォーマルな表現の実態や数学学習におけるそれらの役割について検討し、そうした子どもなりの表現が授業において数学的により洗練された表現へと洗練されていくプロセスについて理論的・事例的に検討すること

で明らかにした「子どもの表現の様相」や「表現の精緻化のプロセス」を踏まえて、子ども自身の表現を生かした指導への示唆を得ること。

3. 研究の方法

研究期間の前半では、主として研究目的を達成するために、表現に関する先行研究の文献研究を行った。そして、インフォーマルな表現を捉えるための理論的枠組みを構築した。

研究期間の後半では、主として研究目的を達成するために、構築した枠組みに即して、小学校算数科や中学校数学科の授業におけるインフォーマルな表現を実証的に同定した。また、事例研究で得た知見をもとに、授業構成や指導に対する示唆を導出した。

4. 研究成果

(1)インフォーマルな表現を捉える枠組みの構築

戸田・岩合ら(1963)の先駆的な研究以来、数学教育における表現の研究の歴史は古く、中原忠男の数学教育における表現体系の研究などがその代表的なものである(中原,1995)。その後も、国内外において、様々な立場からの研究がなされているが、これらの研究では、記号的な表現に代表されるフォーマルな表現だけではなく、子ども等によるインフォーマルな表現が視野に入れられている。しかしながら、中原の表現体系の枠組みをインフォーマルな表現という観点から詳細に検討した研究はほとんどなされていないと思われる。

本研究では、こうした問題意識から、中原(1995)の表現体系の枠組みをベースとしながらも、インフォーマルな表現を含めた「算数・数学の授業で生起する表現を捉えるため

の枠組み」を構築した。

具体的には、中原が研究の対象とした表現に加えて、話し言葉やジェスチャーを研究の対象に含めた上で、中原の表現様式（表現様式 N：記号的表現(S2)、言語的表現(S1)、図的表現(I)、操作的・身体的表現(EG)、現実的表現(R)）とWebbら(2008)の冰山モデルにおける表現の3つの様式（表現様式 W：フォーマル(For)、プリフォーマル(Pre)、インフォーマル(In)）を2次元的に位置づけたモデルを構築した。

表1：インフォーマルな表現を捉える枠組み（詳細は、発表論文を参照のこと）

N \ W	Informal		Formal
	In	Pre	For
S2			
S1			
I			
EG			
R			

この枠組みには次のような特徴がある。

・フォーマルな表現とインフォーマルな表現という対置が本質的かつ一般的であるが、Webbらのいう「プリフォーマルな表現」は、一般的には「インフォーマルな表現」と捉えられるものである。そこで、表1では大きい括りの対置として「インフォーマルな表現」と「フォーマルな表現」を第1行に、「インフォーマルな表現」のさらなる分類としてWebbらの2つの表現様式（プリフォーマル、インフォーマル）を第2行に位置づけている。

・フォーマルな表現は、数学の世界での規約があるという点で、いわば「公的な表現」と特徴づけられる。また、インフォーマルな表現は、その人なりの「個人的な表現」と特徴づけられる。また、プリフォーマルな表現は、Webbらが述べるように「(主として教師や教科書から発出される)教育的意図をもった表現」と特徴づけられる。

・上のことから、この枠組みにおける表現を行う主体は、授業に参加している教師、教科書、子どもと多岐にわたる。プリフォーマルな表現については、Webbら(2008)が、子どもが独自に開発するというより、教師や教科書教材から示唆を受けて使い始める、と述べているように、当初は教師から提案されるであろうが、その後は、子どもが思考の道具として活用するものであるし、場合によっては、それをベースとした、子どもなりの表現（インフォーマルな表現）への変換さえ生じるかもしれない。

・操作的・身体的表現および現実的表現については、その性格上フォーマルな表現を想定することは無理があると考え（表1では該当するセルに斜線を引いている）。

そして、構築したモデルの有効性を例証するために、様々なインフォーマルな表現の具体例を枠組みに基づいて例示するとともに、

インフォーマルな表現が有効に活用されていると考えられる正木(2009)の実践をこの枠組みで具体的に検討し、次のような特徴を見いだした。

・インフォーマルな表現、プリフォーマルな表現を駆使した指導が展開されている。

・表現様式 W という観点から検討すると、基本的にインフォーマルな表現からフォーマルな表現へと推移している。

・表現様式 N という観点から検討すると、2つの授業の内容は共に図形であるが、授業が現実的表現から開始される場合とそうでない場合がある。また、「平行」の授業では、言語的表現、図的表現、操作的・身体的表現の各様式の間の変換が認められる。

さらに、「図形」の授業に対して次のような指導への示唆を導出した。

・用語の知らない図形を学習する授業において、インフォーマルな表現は、子どもが数学的对象に働きかけて考えたことや気付いたことを表明するための有効な（ことによると唯一の）手段である。

・インフォーマルな表現はその本性からいって、子どもが主体的に表出するものである。つまり、授業構成としては、子どもが主体的に探究できる状況を設定し、子どもに気付いたことを主体的に表明させるという構成が基本となる。

・子どものインフォーマルな表現は、大人感覚では曖昧だったり、その意味が不明だったりするかもしれない。正木(2009)の「平行」と同じような授業をした場合、「スウー」という子どもによる表現をクラス全体で取り上げるか、取り上げないかは授業の1つの分水嶺になろう。したがって、子どものインフォーマルな表現が（結果を知っている）大人側では、曖昧であったり、意味がないと感じられても、それをすぐに棄却するのではなく、クラス全体の議論の俎上に載せるという選択肢を授業者は常にもつべきである。

(2) インフォーマルな表現という視点からの授業の実証的研究

算数科や数学科の授業をインフォーマルな表現という観点から分析した。

例えば、小学校第2学年「九九の表ときまり」の授業における教師及び子どものインフォーマルな表現を同定し、その役割や教師の指導における取り扱いを検討した。その結果、子どもによるインフォーマルな表現として、次のものを見い出した。

・ $m \times n$ に対応する第 m 行と第 n 行を示す動的な手の動き

・ 被乗数の「かたまり」を示す手の上下、丸囲みの動き

・ 同じ数のペアを示す指指し（個々、同時）

・ 同じ数のペアの位置関係を示唆する「左側、右側」という言語的表現

・ 交換法則を示唆する「反対でもできる」という言語的表現

また、教師によるインフォーマルな表現として、次のものを見いだした。

- ・色塗り、色囲みによる同じ数のマーキング
- ・交換法則を示唆する手首のひねり

また、子どもと教師の表現活動の関わりを分析することを通して、「適切な表現手段がない場合の表現」「理解の深化」「意味の確認」「パタン発見の足場の提供」といったインフォーマルな表現の機能を明らかにした。

<引用文献>

- 金本良道(2010)。「表記・表現」.日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』(pp.245-252).東洋館出版社.
- 清水紀宏・山田篤史(2010)。「数学的問題解決におけるふり返り活動による解決の進展について:「じゃんけん問題」の解決におけるふり返り活動の分析」.全国数学教育学会『数学教育学研究』,16(1),43-56.
- 岡崎正和・影山和也・岩崎秀樹・和田信哉(2010)。「図形学習における動的な見方の具体化:イメージ図式の視点をもとにして」.全国数学教育学会『数学教育学研究』,16(2),1-10.
- 正木孝昌(2009)。「算数の授業で教えるはいけないこと,教えずにはいけないこと」.黎明書房.
- 中原忠男(1995)。「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」.聖文社.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston,VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics(2001). The Role of Representation in School Mathematics. Reston,VA: NCTM.
- 戸田清,岩合一男他.(1963)。「数学教育における表記の問題(第一報)」.日本数学教育学会誌『数学教育学論究』.6,25-36.
- Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. Mathematics Teaching in the Middle School, 14(2), 110-113.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

清水紀宏、数学教育における反省的思考力の育成、日本数学教育学会春期研究大会論文集、査読無、2017、第5巻、掲載決定。

清水紀宏、数学教育における汎用的能力の育成:問題解決という観点から、日本数学教育学会春期研究大会論文集、査読無、2016、第4巻、pp.293-300。

山田篤史、数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性、愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』、査読無、第58巻、2016、pp.21-34。

清水紀宏、山田篤史、算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組み、全国数学教育学会誌『数学教育学研究』、査読有、第21巻、第2号、2015、21(2)、pp.89-102。

山田篤史、片野慶子、算数授業の振り返り活動を通じた説明表現の構成と修正に関する一考察、愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』、査読無、第57巻、2015、pp.29-38。

山田篤史、問題解決的な授業における数学的表現の使用とその修正:考え方の説明における図の場合、愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』、査読無、第56巻、2014、pp.37-44。

[学会発表](計2件)

清水紀宏、山田篤史、「九九のひょうとしまり」の授業に見られるインフォーマルな表現、全国数学教育学会第45回研究発表会、2017年1月28日・29日、広島大学教育学部(東広島市西条町)。

清水紀宏、山田篤史、算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組みについて、全国数学教育学会第41回研究発表会、2015年1月31日・2月1日、広島大学教育学部(東広島市西条町)。

6. 研究組織

(1)研究代表者

清水 紀宏(SHIMIZU Norihiro)
福岡教育大学・教育学部・教授
研究者番号:50284451

(2)研究分担者

岩崎 浩(IWASAKI Hiroshi)
上越教育大学・学校教育研究科・教授
研究者番号:80251867

山田 篤史(YAMADA Atsushi)
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号:20273823

岡崎 正和(OKAZAKI Masakazu)
岡山大学・教育学研究科・教授
研究者番号:40303193