

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25381213

研究課題名(和文) 社会的相互作用に基づく「数学的意味と表現の相互発達」に関する授業構成の研究

研究課題名(英文) Research on design of mathematics lessons from the viewpoint of mutual development of mathematical meaning and mathematical representation based on social interaction

研究代表者

山口 武志 (YAMAGUCHI, TAKESHI)

鹿児島大学・法文教育学域教育学系・教授

研究者番号：60239895

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、数学的意味の協定と数学的表現の協定の2つを社会的相互作用の機能ととらえた上で、社会的相互作用を基軸とする授業デザインの枠組みを提起するものである。本研究の成果は次の2点になる。第一は、授業デザインや子どもの活動の分析に活用可能な「数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル」を提起するとともに、「数学的意味と数学的表現の相互発達を視座とした授業デザイン原理」を提起したことである。第二は、こうした理論的枠組みをもとに、小学校第2学年「たし算」の単元に関する「授業改善案」と「授業計画案」を策定した上で、教授実験や事後調査の結果をもとに、それらの有効性や妥当性を検証したことである。

研究成果の概要(英文)：This research aims to develop the theoretical framework for designing teaching and learning process of mathematics which focuses on significant roles of social interactions: negotiation of meaning and negotiation of representation. Main findings of this research are summarized as the following two points. Firstly 'model of mutual development of mathematical meaning and mathematical representation' and 'three principles for designing mathematics lessons based on this model' were developed for both the analysis of social interactions among children and designing mathematics lessons. Secondly an alternative new plan of 'addition' at the second grade in the elementary school was also developed. As the result of both qualitative analysis of the teaching experiment and the analysis of the post-test, the effectiveness of 'model of mutual development of mathematical meaning and mathematical representation' and the new plan of 'addition' were verified respectively.

研究分野：数学教育学

キーワード：社会的相互作用 数学的意味 数学的表現 認識論 記号論

## 1. 研究開始当初の背景

### (1) 本研究の背景(1): 実践的課題

今日、算数・数学の多くの授業では、主体的な学習の実現のために、子どもたちの多様な考え方に基づく「社会的相互作用 (social interaction)」の過程が重視されている。しかし、実際の授業では、問題解決学習の文脈のもとで、社会的相互作用の過程が形骸化し、その結果、子どもたちの多様な考えを十分に生かすことができないまま、教師側から知識を一方的に押しつけてしまう場合が決して少なくない。

こうした実践的課題の背景の1つには、「数学的意味と数学的表現の相互発達」(以下、「意味と表現の相互発達」)の問題が潜在する、と考えられる。算数・数学は「記号の学問」であるといわれるように、算数・数学学習では、慣例的な表記や形式が導入されることが多い。つまり、算数・数学学習において、子どもたちは、新たに導入された表記や形式を内化しつつ、「各自が構成した主観的な意味」と「慣例的な表記や形式」との接続を図り、教室集団内の社会的相互作用を通じて、共有された客観的な意味を協定している、ととらえることができる。しかし、実際の授業では、数学的意味の構成と慣例的な表記や形式との接続が十分に図られないまま、新しい表記や形式を与えることにとどまっている場合もある。また、多くの教師が、両者の接続の重要性を認識しつつも、具体的な指導をイメージすることできず、ジレンマを抱えている現状にある。したがって、社会的相互作用に基づく教授・学習について、「数学的意味と数学的表現の相互発達」という視座から、理論的かつ実践的基盤を構築することがきわめて重要になっている、と考えた。

### (2) 本研究の背景(2): 理論的課題

上述の実践的課題に深く関連する数学教育の理論的研究としては、次の2つがあげられる。

構成主義、社会文化主義、相互作用主義に関する研究

第一は、数学教育における「構成主義 (constructivism)」の台頭と、「認識論的協応」の問題をめぐる近年の研究動向である。構成主義は、子ども主体の学習に通じる認識論として注目されたが、以下のような理論的な課題や限界をかかえている。

「数学は一種の言語である」といわれるように、例えば、数式に代表される記号的表現は、いわば「思考の道具」であり、文化として歴史的に継承された「文化的道具 (cultural tool)」といえる。一方、「認識」と「表現」は表裏一体であり、個人の認識は、ある種の表現によって表出されなければ、コミュニケーションの対象にはならない。このような視座に立つとき、構成主義については、次のような課題が指摘される。その課題とは、個人の主観的意味を反映したインフォーマ

ルな表現が、文化として継承されてきたフォーマルな表現にいかに関係されるのかということ十分に説明できない、という課題である。つまり、構成主義では、「主観的意味から客観的意味への変容」と「インフォーマルな表現からフォーマルな表現への洗練過程」との相互関係を十分に説明できない、と考えられるのである。

こうした構成主義の理論的課題に対して、近年では、「認識論的協応」という視座のもと、「社会文化主義」や「相互作用主義」による構成主義の補完が議論されている。しかし、「認識論的協応」という視座から、授業の課題を導出する具体的研究が十分に行われているわけではない。

表現の洗練過程に注目した研究

本研究課題に密接に関連する第二の研究は、表現の洗練過程に注目した研究である。具体的には、オランダを中心に展開されている「実際の数学教育 (Realistic Mathematics Education; 通称 RME)」の研究と、オーストリアの数学教育研究者 Dörfler による一般化理論があげられる。RME では、「活動」の水準として、「課題場面における活動」、「参照的活動」、「一般的活動」、「慣習的なシンボルを用いた推論」の4つが設けられている。上述の実践的課題は、「一般的活動」と「慣習的なシンボルを用いた推論」との接続の問題に翻案されるが、その接続の具体については十分な説明がなされていない。

一方、Dörfler は、数学学習の本質を数学的一般化ととらえ、教授学的視座から一般化モデルを提唱している。氏のモデルの「構成的抽象」とよばれる過程では、活動の不変性を反省する過程と、活動の本質を表現する過程とが並列的に配置されている。つまり、主観的意味とインフォーマルな表現との相互発達が構成的抽象の本質であることが示されている。しかし、それらが、フォーマルな意味や表現といかに関係するかについては明確ではない。

## 2. 研究の目的

以上のような実践的課題や理論的課題をふまえて、本研究では、次の3つの目的を設定した。第一は、数学的意味の構成における社会的相互作用の役割を重視している各種の認識論(構成主義、社会文化主義、相互作用主義)をふまえて、社会的相互作用に基づく「意味と表現の相互発達」に関する教授・学習モデルを理論的に構築することである。第二は、慣例的な表記や形式が導入される教材に焦点をしばり、「意味と表現の相互発達」という視座から、教科書分析等を通じて、教材ごとに実践的課題を具体的に導出することである。第三は、導出された実践的課題をふまえて、構築した教授・学習モデルに基づいて授業改善案を策定し、教授実験を通じて、その有効性、妥当性について実証的に検証することである。これらの研究を通じて、

「意味と表現の相互発達」という視座から、「練り上げ」段階の指導改善に関する具体的な示唆を導き、教師教育にも資することをねらった。

### 3. 研究の方法

理論的研究として、構成主義、相互作用主義、社会文化主義の各認識論における社会的相互作用のとらえ方や機能などを明確にすることとした。また、数学教育における記号論的研究をとりあげ、数学的表現の洗練過程についても考察することとした。こうした理論的研究では、主として文献解釈的手法をとった。

一方、実践的研究としては、小学校における「たし算」(第2学年)を取りあげた上で、「意味と表現の相互発達」の視座から、当該教材の教授・学習の課題を明確にするとともに、その課題を克服するための方策について検討するという方法をとった。

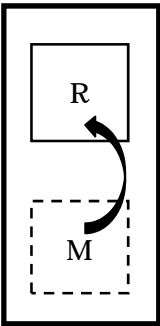
### 4. 研究成果

#### (1) 理論的研究の成果

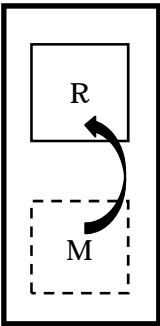
数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル(相互発達モデル)

3年間の研究では、「意味と表現の相互発達」を視座とする授業デザインの基盤となる認識論をまず整理、確認した上で、数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル(相互発達モデル)を新たに提起した。この相互発達モデルは、構成主義、社会文化主義、相互作用主義の3つの認識論の協応を認識論的基盤とするものであり、以下の4つの基本的特性をふまえたものである。

- 〔特性1〕シンボル化を基盤とした「意味と表現の基本ユニット」
- 〔特性2〕意味と表現の対象化及び能記性・所記性
- 〔特性3〕意味と表現に関する3つの水準(意味と表現の連続的移行)
- 〔特性4〕シンボル化された表現の専有、道具化

特性1は、数学的意味と数学的表現との基本的な関係にかかわる特性である。本研究では、表現には、数学的活動を基盤として構成された意味がシンボル化されていると考え、それを図1のように表すこととした。そして、これを「意味と表現に関する基本ユニット」(以下、基本ユニット)とよぶこととした。図1において、は、意味の表現へのシンボル化を意味する。このように、基本ユニットは、シンボル化を基軸としながら、意味と表現が相互補完的かつ一体的に構成、変容することを示している。

特性2は、意味を反映した表現の発達・変容に関する基本的特性である。数学学習が進展するときには、表現の対象化や表現の能記性・所記性の転換が生じる。このことをふまえ、社会的相互作用によって促進される表現の対象化や、表現の能記性と所記性の転換を

「」によって表すとともに、「基本ユニット」間の変容を図2のように表すこととした。勿論、表現にはシンボル化された意味が反映されているため、表現の対象化、能記性・所記性の転換は、意味の対象化や振り返りも含意している。

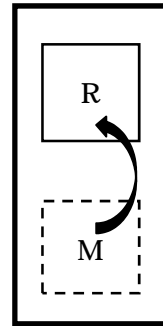


図1 シンボル化を基盤とした「意味と表現に関する基本ユニット」

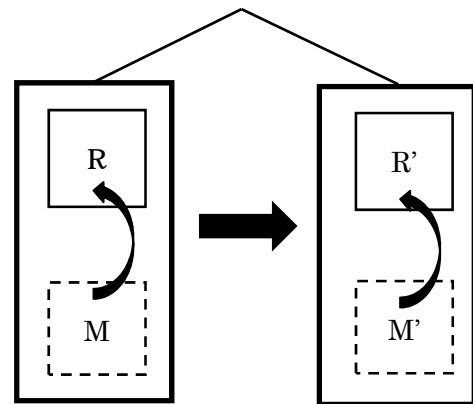


図2 「基本ユニット」の対象化と能記性・所記性の転換

特性3について、「基本ユニット」の連続的発達においては、「表現」の質的変容や、表現に反映された「意味」の質的変容が問題になる。本研究では、社会的相互作用の重要な役割として、「意味の協定」と「表現の協定」の2つに注目していることをふまえ、協定の程度に応じて、「意味の協定」と「表現の協定」を以下の3つの水準でとらえることとした。

- 〔R: 表現 (representation)〕
  - IR: インフォーマルな表現 (informal representation)
  - L-NR: 局所的に協定された表現 (locally negotiated representation)
  - CR: 慣例的表現 (conventional representation)
- 〔M: 意味 (meaning)〕
  - SM: 主観的意味 (subjective meaning)
  - L-NM: 局所的に協定された意味 (locally negotiated meaning)
  - NM: 協定された意味 (negotiated meaning)

「数学的意味と数学的表現の相互発達」を視座とした「授業デザイン原理」

構成主義，社会文化主義，相互作用主義の3つの認識論の協応という認識論的立場や上述の相互発達モデルをふまえ，本研究では，「意味と表現の相互発達」を視座とした「授業デザイン原理」として，次の3つの原理を提案した。これら3つは，教師が，「意味と表現の相互発達」の視座から授業をデザインする際の基本的な指針とするものである。

〔原理1〕数学的意味に関する子どもの素朴な認知モデルを検討する。その上で，社会的相互作用による「主観的意味」から「協定された意味」への数学的意味の発達過程を検討する。

〔原理2-1〕シンボル化された数学的表現の対象化，能記性・所記性の転換という視座から，社会的相互作用による「インフォーマルな表現」から「慣例的表現」への数学的表現の発達過程を検討する。

〔原理2-2〕インフォーマルな表現と慣例的表現との接続という視座から，慣例的表現の導入の適時性やその専有，道具化の過程について検討する。

これら3つの原理のうち，原理1は，主として，意味の発達過程に関する原理である。また，それは，構成主義，相互作用主義を認識論的背景とする原理である。一方，原理2-1と原理2-2は，主として，表現の発達過程に関する原理である。原理2-1は，相互作用主義，社会文化主義を認識論的背景とする原理であり，原理2-2は，社会文化主義を認識論的背景とするものである。実際には，こうした3つの原理を基本としつつ，個々の教材の特性をふまえながら，授業を具体化することとした。

## (2) 実践的研究の成果

小学校第2学年「たし算」の授業改善に関する検討課題の抽出

本研究では，相互発達モデルに基づく授業改善に関する実践的研究として，小学校第2学年「たし算」に関する授業改善に取り組んだ。実践的研究の教材として，第2学年「たし算」に注目した理由は，次の2点による。第一は，「たし算」の単元では，単元の初期において，「十の位からたすたし算」と「一の位からたすたし算」という2つの典型的な認知モデルが併存しており，「繰り上がりのないたし算」から「繰り上がりのあるたし算」への学習過程では，2つの認知モデルをめぐる「数学的意味の協定」のあり方が授業構成の第一の要になるからである。第二は，この単元では，「筆算」という慣例的表現がはじめて導入されることである。つまり，「たし算」の単元では，心理的道具の典型である筆算をめぐる，子どもたちのインフォーマルな表現と筆算に基づくフォーマルな表現との調整を図りつつ，「数学的表現の協定」

が求められ，単元全体を通じたその協定のあり方が授業構成の第二の要になるからである。このように，「たし算」に関する実践的研究の主要な特徴は，筆算という慣例的表現が導入される単元に焦点を当てて，子どもたちどうしによる社会的相互作用を推進力とする「意味と表現の相互発達」の様相を検討しようとする点にある。

「たし算」の授業改善案を検討するにあたっては，まず，教科書分析を通じて，「たし算」の教材に関する具体的な検討課題を抽出した。その結果，次の3つの検討点が浮き彫りになった。

〔観点1〕「繰り上がりのない2位数どうしのたし算」(以下，「繰り上がりのないたし算」)において，「一の位からたすたし算」だけではなく，「十の位からたすたし算」も考慮しているか否か。

〔観点2〕「繰り上がりのある2位数どうしのたし算」(以下，「繰り上がりのあるたし算」)において，「一の位からたすたし算」の一般性，能率性を検討しているか否か。

〔観点3〕「繰り上がりのないたし算」あるいは「繰り上がりのあるたし算」において，「2段形式の筆算」のような，慣例的な筆算に準ずるインフォーマルな表現を取りあげているか否か。

小学校第2学年「たし算」に関する「授業改善案」及び「授業計画案」の策定

の教科書分析を通じて指摘した3つの具体的な検討点をふまえ，本研究では，「相互発達モデル」や「授業デザイン原理」の視座から，次の3つの「授業改善案」を基盤とした第2学年「たし算」の教授・学習過程を提起した。

### 〔改善案1〕

「繰り上がりのないたし算」の学習では，「一の位からたすたし算」だけではなく，「十の位からたすたし算」も取りあげる。その際，「繰り上がりのないたし算」では，「十の位からたすたし算」と「一の位からたすたし算」との間に一般性や能率性の違いはないことから，「一の位からたすたし算」に集約するのではなく，両者をともに認める扱いとする。

「繰り上がりのあるたし算」の学習においても，まず，「一の位からたすたし算」と「十の位からたすたし算」の考えの両方を取りあげ，子どもどうしの社会的相互作用を通じて，「一の位からたすたし算」の一般性，能率性を検討させる。

「一の位からたすたし算」及び「十の位からたすたし算」については，子どもたちなりに命名させ，それらの共有化を図る。

### 〔改善案2〕

慣例的な筆算の導入に至るまでに，「たし算シート(ブロック)」，「たし算シート(数)」，

「2段形式の筆算」という3種類のインフォーマルな表現を導入し、積極的に活用する。  
〔改善案3〕

慣例的な筆算については、「繰り上がりのないたし算」の学習の初期に導入するのではなく、「繰り上がりのないたし算」の学習の終末に導入する。

3つの改善案のうち、改善案1は、授業デザイン原理の原理1に基づく改善案を示したものである。とは、「繰り上がりのないたし算」と「繰り上がりのあるたし算」において、「十の位からたすたし算」と「一の位からたすたし算」をどのように位置づけるかを示したものである。また、は、たし算に関する意味のシンボル化を促進するための具体的支援である。

改善案2は、主として、授業デザイン原理の原理2-1に基づく改善案であり、慣例的な筆算に至るまでの「表現の距離」をできるだけ小さくするために、3種類のインフォーマルな表現の導入、活用を提案するものである。

改善案3は、主として、授業デザイン原理の原理2-2に基づく改善案である。この改善案は、慣例的な筆算の導入時期を明確に示したものである。それは、改善案2と密接に関係するものでもある。つまり、単元の初期、とりわけ「繰り上がりのないたし算」の学習においては、慣例的な筆算よりも、むしろ改善案2で述べた3種類のインフォーマルな表現の活用を重視するものである。

以上のような3つの「授業改善案」をもとに、本研究では、「相互発達モデル」にそって具体的な教授・学習過程を検討し、その結果を「授業計画案」として提案した。

実験授業の実施とその考察

鹿児島市内の小学校第2学年・1学級を対象として、計7単位時間から成る「たし算」に関する教授実験を2013年5月に実施した。また、教授実験の約1か月後に事後調査を行った。

教授実験や事後調査の結果を考察したところ、で述べた「授業改善案」及び「授業計画案」が、たし算の意味理解の深化や、慣例的な筆算の一般性、能率性に関する理解の深化に対して、一定程度、寄与することが示唆された。こうした結果は、理論的に提起した「相互発達モデル」や「数学的意味と数学的表現の相互発達を視座とした授業デザイン原理」の有効性を示すものでもある、と考えている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

山口武志, 算数・数学教育における社会的相互作用に関する認識論的・記号論的研究 - 「数学的意味と数学的表現の相互発達」の

視座からの小学校第2学年「たし算」に関する授業改善 - , 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』査読有, 第22巻・第1号, 2016, 115-147.

〔学会発表〕(計1件)

山口武志, 算数・数学教育における社会的相互作用に関する認識論的・記号論的研究 - 「意味と表現の相互発達」の視座からの小学校第2学年「たし算」に関する授業改善 - , 全国数学教育学会・第42回研究発表会, 2015年6月14日, 鹿児島大学教育学部(鹿児島県・鹿児島市).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山口 武志 (YAMAGUCHI TAKESHI)

鹿児島大学・法文教育学域教育学系・教授

研究者番号: 60239895