様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００２

研究課題名（和文）散在型有限単純群Ｊ４の分解行列決定

研究課題名（英文）The decision of decomposition numbers for the sporadic finite simple group J4

研究代表者
脇　克志（Waki, Katsushi）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：３０２５０５９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：散在型有限単純群J4の標数３の有限体上の１３３３次既約表現構成が、２つの極大部分群H0とH1を利用した計算機によるアマガメーションで可能であることを示した。極大部分群H0は、標数２の素体上の１０次元ベクトル空間Wに作用する１０次直交群から、Wの極大全特異部分空間U5を固定する部分群として構成する。極大部分群H1は、５次元部分空間U5の４次元部分群U4を固定する部分群として構成する。H0とH1の標数３の有限体上の１３３３次表現を構成し、H0とH1の共通部分群を糊代とする貼り合わせ（アマガメーション）により、J4の１３３３次既約表現が構成される。

研究成果の概要（英文）：We proved that we can construct irreducible representation of degree 1333 over the finite filed of characteristic 3 by using the computational amagamation of maximal subgroups of J4.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：モジュラー表現　散財型有限単純群

１．研究開始当初の背景

有限群 G のモジュラー表現の理論は、1940 年代に R. Brauer によってその基礎が構築された。標数 0 の離散付値環上の既約通常表現から作られた標数 p の剰余体 k 上のモジュラー表現が既約モジュラー表現にどのように分解されるのかを表したものを分解行列と呼ぶ。有限群のモジュラー表現は、線形に拡大することで群環 kG の表現と見ることが出来る。kG の直既約イデアルへの直和分解 kG = B1⊕B2⊕・・⊕Bt を考えたとき、各 Bi をブロックと呼ぶ。分解行列も、このブロックに合わせて直和分解されるため、分解行列を含めたモジュラー表現の議論はブロックごとの議論に制限して考える事が出来る。このとき、各ブロック毎に定まる不足群と呼ばれる p-部分群が分解行列の決定に深く関わってきている。1 次元の自明な表現を含むブロックを、主ブロックと呼んでいる。特に、主ブロックの不足群は Sylow p-部分群となる。

I. 散在型有限単純群の分解行列

２６個の散在型有限単純群について、現在１８個の単純群で全ての標数 p に対する分解行列が決定している。しかし、未解決で残っている単純群 Ly, Th, F23, Co1, J4, Fi′24, B, M は、群自身の位数や極大部分群との指数が非常に大きく、部分群からの単純な誘導表現や、テンサー積の情報だけでは分解行列を得る事が不可能である。標数が 2 の場合は、J. Thackray により Ly, Th, Co1, J4 の解析が進められている。奇素数の場合では、Th については G. Hiss, J. Mueller、Co1 については F. Noeske、そして F23 や Fi′24 については、C. Jansen が計算機を用いた具体的な表現の構成により、2008 年までに未解決の有限単純群について部分的な分解行列の決定に成功している。しかし、2009 年の研究代表者による散在型有限単純群 J4 の部分的な分解行列の決定以降、大きな進展が見られずその後に発表された分解行列に関する論文は、G.Hiss らによって、散在型有限単純群 HN の標数 2,3 の場合について、今までの計算結果をまとめた論文１本のみとなっている。

II. Broue 予想と分解行列

有限群のモジュラー表現論では、1990 年に示された Broue 予想が未解決な最も重要な問題と考えられている。Broue 予想とは、可換な不足群 D を持つ G と D の正規化部分群 NG(D) のブロックの表現から作る導来圏が同値となるという予想である。この予想は、すでにいくつかの不足群をもつブロックに関して、肯定的な証明が完了している。近年では、越谷・Mueller の論文により、散在型有限単純群の HN や Co3 で、証明された。この Broue 予想の確認には、分解行列などモジュラー表現の基本的な情報が必要となる。そのため、この予想を証明するための必要条件として、分解行列の出来るだけ早い確定が重要となっている。

２．研究の目的

標数 3 の場合について、「研究開始当初の背景」で述べたとおり、その極大部分群での情報はすべて確定している。また、J4 の主ブロック以外の分解行列がいくつかのパラメータを除き確定している。最後に残った主ブロックの分解行列を確定するため、A. Ivanov の Amalgam を用いた手法を組合わせて主ブロックに属する次数が最小の自明でない 1333 次の既約表現を構成し、M. Ringe によって公開されているプログラム MeatAxe を利用して、構成した表現のテンサー積から新たな既約表現を見つけ出し、主ブロックに属するモジュラー表現解析の足がかりにする。

３．研究の方法

A. Ivanov の Amalgam を用いた手法を組合わせて主ブロックに属する次数が最小の自明でない 1333 次の既約表現を構成する。A. Ivanov のテキストから得られる手法を実際の標数 3 の既約表現構成に適用する。具体的には、山形大学情報ネットワークセンターの高速演算計算機システムを利用して、Amalgam を用いた 1333 次の既約表現の構成を行う。

この課題において、表現の構成作業以上に既約表現から別の既約表現を求める作業が重要となる。この作業により得られた個々の結果は公開されているものの、その具体的な細かい作業については不明な部分も多い。そこですでに多くの表現構成を手がけているドイツのアーヘン大学に所属する J. Mueller 氏を 2014 年 12 月に開催を予定している研究集会「代数学と計算」に招聘し、直接その手法を学ぶ。

プログラム MeatAxe を用いたテンサー積による新しい既約表現の抽出では、むやみにテンサー積を計算することはせずに、指標による事前計算を通して、必要となる新しい既約表現がどにような組合せのテンサー積で得られるかを予測しながら、進めていく。

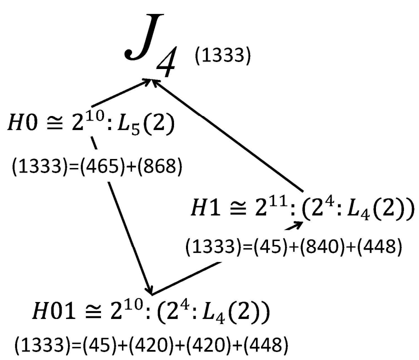
また、表現の次元が情報ネットワークセンターの計算機では、処理しきれないほど大きくなってしまう場合も想定されるので、この MeatAxe を使った情報収集が、大きな成果を上げない場合は、ドイツの F. Noeske 氏との共同作業を通して、MOC system に J4 の極大部分群の分解行列情報を組み、計算量の少ない指標計算を駆使して、細かい情報を積み上げて、出来るだけ分解行列の可能性を絞り込む。

４．研究成果

J4 については、研究代表者により、すべての奇素数に対する極大部分群の分解行列と標数 3 の場合に J4 の分解行列の部分的な結果がすでに論文となっている。計算機を用いた標数 3 での 1333 次既約表現の構成のため、

必要となる J4 の 2 つの極大部分群 H0、H1 の計算機による具体的な構成が完了した。具体的な構成方法は、まず、2 元体 K=GF(2)上の 10 次直交群が 10 次元ベクトル空間 W の極大な全特異部分空間 U5 を固定する固定部分群として極大部分群 H0 とする。全特異部分空間 U5 は 5 次元であり、U5 の 4 次元部分空間 U4 を固定する固定部分群 H1 とする。更に、H0 で U4 を固定する固定部分群 H01=H0∩H1 とする。

計算機による極大部分群の構成には、代数構造解析システム GAP を活用し、最初に部分群 H0 と H01 の構成の後、H01 の位数 2 の特別な自己同型写像 t1 を使った半直積により、群 H01 の拡大群 H1 が構成出来る。このとき、H0, H1 は、J4 の部分群と同型となる。2014 年 8 月の有限群草津セミナーでは、H0 及び H01 の具体的な構成方法と特別な自己同型写像 t1 の持つ性質をまとめて、発表した。また、2015 年 3 月の日本数学会において、計算機による具体的な自己同型写像 t1 と t1 による拡大群 H1 の構成を発表した。



標数 3 での 1333 次既約表現の構成には、最初に部分群 H0 の標数 3 での 465 次と 868 次の既約表現を構成する。この 2 つの既約表現は、H0 の指数が 155 と 868 の部分群を作り、この 2 つの部分群の 3 次と 1 次の既約表現を H0 に誘導することで得る。H0 の２つの既約表現を 155+868 と直和に並べることで、H0 での 1333 次の表現を得る。次に H0 の２つの既約表現を H01 に制限して、H01 の既約表現を得る。H01 に制限することで、465 次の既約表現は、45 次と 420 次の既約表現に分解する。また、868 次の既約表現は、420 次の既約表現と 448 次の既約表現に分解する。この 4 つの既約表現を H0 の 1333 次の表現に対応する形で、45+420+420+448 の順番に直和に並べると H01 の 1333 次の表現が完成する。ここで、H01 の部分群と自己同型写像 t1 を H1 の元とみて、H01 の４つの既約表現を H1 の表現に拡張する。具体的には、t1 に対応する 1333 次の表現を構成するのだが、そのためには H01 の３つの真部分群と４つの既約表現を作り、誘導により H01 の４つの既約表現を再構成する。ここで、2 つの 420 次の既約表現を構成する際は、同じ真部分群で同じ次元の別の既約表現を使う。この３つの真部分群と t1 で生成される H1 の部分群を構成し、真部分群の４つの既約表現を H1 の部分群の表現に拡張する。その時、420 次の既約表現を構成する２つの既約表現は、１つの既約表現にまとまる。これで、H1 の３つの部分群と３つの既約表現が出来上がり、これらの表現を H1 に誘導すると 45 次と 820 次と 448 次の既約表現となる。３つの既約表現を 45+840+488 と直和に並べた H1 の表現と、155+868 と直和になっている H0 の表現を合わせることで、J4 の 1333 次の既約表現が構成できる。

本研究課題から、計算機を使った有限群の作用に関する研究を分子立体構造の分類に応用する研究につながりが生まれ、山形大学理学部物質生命化学科の崎山博史氏との共同研究に発展した。3 次元空間内で自由度を持つ分子構造を有限群の作用を活用した回転と鏡映で同一視することで、立体的な分子構造を分類し、作用による軌道を計算することで、それぞれの分子構造の発生割合を導き出した。この共同研究の研究結果は、2014 年から 2016 年の発表論文 3 編にまとめられている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

① H. Sakiyama, K. Waki, Conformational Analysis of Hexakis-Methylamine Nickel(II) Complex on the Basis of Computational Group Theory and Density Functional Theory, J. Comput Chem. Jpn, Vol 13,(2014), 223-228 http://dx.doi.org/10.2477/jccj.2014-0003

② H. Sakiyama, K. Waki, Conformational Analysis of Hexakis-N-Methylamine Nickel(II) Complex on the Basis of Computational Group Theory and Density Functional Theory, J. Comput Chem. Jpn, Vol 1,(2015), 5-8 http://doi.org/10.2477/jccjie.2015-0047

③ H. Sakiyama, K. Waki, Enumeration of Conformers of Octahedral [M(ABC)6] Complex on the Basis of Computational Group Theory, Iranian Journal of Mathematical Chemistry, Vol. 7(2) (2016), 223-234

〔学会発表〕（計　２件）

① 脇　克志、J4 の 1333 次表現の構成、有限群草津セミナー、2014 年 08 月 02 日～2014 年 08 月 02 日、草津セミナーハウス

② 脇　　克志、Subgroups of J4 for Amalgamation、日本数学会、2015 年 03 月 23 日～2015 年 03 月 23 日、明治大学

６．研究組織

(1)研究代表者

脇　克志（WAKI, Katsushi）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：３０２５０５９１