様　式　C−19、F−19−1、Z−19　(共通)

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 4 月 24 日現在

機関番号： １２５０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2016
課題番号： ２５４０００６

研究課題名（和文） 有限群の部分群族と関連する代数構造に関する研究

研究課題名（英文） Research on algebraic structures related to subgroup families of finite groups

研究代表者
澤邉　正人（Sawabe, Masato）

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：６０３４６６２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：有限群の部分群複体をクイバーと見なし，付随するパス代数とその表現を用いて複体を考察するこれまでにない新しい手法を開発した。この手法を用いて、生成定数という整数を導入した。その定数を介して、有限可解群の特徴付けに成功し、また有限群の複素既約指標に関する新しい性質を明らかにした。また今後の更なる研究の推進に向けて、ベキ零部分群複体に着目し、そのホモトピーやホモロジーに関する基礎理論を構築することが出来た。

研究成果の概要（英文）：We regard a subgroup complex as a quiver. Then, by using the associated path algebra and its representation, we provide a new method for studying finite groups via subgroup complexes. Indeed, we introduce an integer called a generating constant from representations of path algebra, and applying those constants, we characterize finite solvable groups. In addition to this, we prove new properties of complex irreducible characters of finite groups. For further development on this research in the future, we focus on nilpotent subgroup complexes, and establish fundamental theory on homotopy and homology of such complexes.

研究分野： 有限群

キーワード： 有限群　単体複体

１．研究開始当初の背景

(1) 研究の動機：本研究の目的は，有限群 G の一般的な性質を解明することである。ここで具体的な研究理念は『有限群 G に於ける部分群の交わり合い・重なり合いが詳細に分かれば，G の群構造は全て把握出来るはずである』というものである。この「交わり合い・重なり合い」を考察するために，これらに相当する数学的対象を設定する必要がある。そこで，G の任意の部分群族 D に対してΔ(D):={ (H0<H1<…<Hk) | Hi ∈ D, i=0,1,2,…} を D に属する部分群から構成される包含列全体の集合とする。これが考察すべき「交わり合い・重なり合い」に関する情報となる。同時に，包含列に関する固定部分群の構造（共役性の情報）も重要である。特に G の部分群全体からなる族を Sgp(G) で表すとき，上記理念は次のようになる。『Δ(Sgp(G)) の詳細が分かれば G の群構造は全て把握出来るはずである』

(2) 幾何的背景：研究理念に従えば部分群全体 Δ(Sgp(G)) が研究対象となる。しかしながら，より一般的な議論を展開するために，あるいは様々な応用を見越して，任意の部分群族 D⊂Sgp(G) とその部分群列全体 Δ(D) を研究対象とする。まず，組 (D,Δ(D)) には D を頂点集合，Δ(D) を単体集合とする有限抽象単体複体の構造が入る。つまり複体 Δ(D) はその幾何学的実現である位相空間と見なすことが出来る。そこで Δ(D) に付随する『ホモトピー不変量』を先行研究として追求した。

ここでは，さらに D をある p-部分群族に制限して考察した。具体的には D に付随する G のコセット幾何 Δp(D) を定義し，もとの Δ(D) と Δp(D) が位相空間として互いにホモトピー同値になるための群論的十分条件を突き止めた。この一般論をマシュー群やモンスターなどの散在型有限単純群に適用すると，それらに付随するいわゆる 2-局所幾何とその 2-部分群全体からなる複体が互いにホモトピー同値であることが導かれる。本来この結果は，個別の散在群に依存して ad-hoc に確認されているものであったが，応募者の研究成果により統一的な解釈が初めて可能になった。

(3) 代数的背景：任意の部分群族 D⊂Sgp(G) とその部分群列全体 Δ(D) に付随する代数系を定義し，それを介して Δ(D) を考察することを試みた。まず部分群に付随する代表的な代数系としてバーンサイド環 Ω(G)=Ω(G,Sgp(G)) がある。これは有限 G-集合全体（部分群 H ∈ Sgp(G) の剰余空間 G/H 全体）で張られた自由加群であり，さらに G-集合の直和とデカルト積で演算が定義された可換環のことである。ここで Sgp(G) を真の部分群族 D⊂Sgp(G) に制限した場合でも Ω(G,D) に環構造が入る場合がある。大雑把にいうとこれが一般バーンサイド環（GBR）である。そこで，この Ω(G,D) を追求した。

これは GBR の専門家である山形大学（現近畿大学）・小田文仁氏との共同研究である。まず部分群族 D⊂Sgp(G)に対して Ω(G,D) が環構造持つかどうかは自明なことではない。そこで環構造を誘導する Dの十分条件を追求した。すると，幾何的背景の欄で述べたホモトピー同値を誘導する群論的条件との類似に辿り着いた。またその場合、幾何的に重要と思われる D に対して，Ω(G,D) の単位元が単体複体 Δ(D) のレフシェッツ不変量として実現されていることを証明した。この結果は Δ(D) の幾何的性質と代数的性質を結びつける著しい成果である。

２．研究の目的

本研究の目的は次のように定められる。『部分群族 D 及び D の包含列全体（交わり合い・重なり合い全体）からなる集合に付随する代数系を定義し，それらを解析する。さらにこの代数系を介して，有限群の一般的な性質を明らかにする』

(1) 代数的考察を継続する理由：これまでの研究対象でもある GBR はある種の可換環であるが，レフシェッツ不変量などの位相幾何学的対象も自然に現れてきた。このように代数系を構成する出発点が，我々の着目する Δ(D) であれば，これに付随する幾何的な量も自ずと現れることが期待出来る。

(2) パス代数を用いた新しい方向性：これまでの研究では，幾何学的にも代数学的にもΔ(D) は部分群の列の集まりとしか見ていなかった。そこで部分群の包含関係 H<K がある所に，矢印 H←K を定義することによりΔ(D) をクイバー或いはクイバーのパス全体と見なすのである。これは小圏をクイバーと見なす自然な考え方であるが，有限群やその部分群の考察に於いては，これまでに無かった発想である。クイバーが得られれば付随するパス代数が定義される。そこでこのパス代数を介した有限群の性質の解明が本研究の主題である。特に有限群にとって単純性の判定方法は極めて重要であることから，それに関わるクイレン予想の解決，或いは予想のパス代数へ帰着を具体的な研究目的として挙げることにする。一方，Δ(D) は部分群から定義されるクイバーであることから Δ(D) 上に群 G の自然な置換表現が存在する。即ち，パス代数やそこから派生してくる代数系の考察に有限群の表現論が応用可能となる。この表現論の利用も本研究の大きな特徴である。

３．研究の方法

(1) 代数 UD(G) の導入：部分群全体の族 Sgp(G) をクイバーと見なしたとき，それを

QG で表す。QG のパス代数 AG とは QG のパス（部分群の包含列）で生成される自由加群であり，パスの結合で積が定義される Z-代数のことである。一方 Sgp(G) で生成される自由加群 V を考え，これを次の様に AG-加群と見なす。即ちパス$\sigma=(H_0<H_1<\cdots<H_k)\in AG$ に対して φ(σ) は H0 を Hk に移す右作用素であり，ψ(σ) は Hk を H0 に移す左作用素であるとする。そこで，これら二つの作用素を用いて 部分群の繋がり具合を詳細に解析することを試みる。このとき，これらの作用素全体で生成される Z-代数を UD(G) で表し我々の研究対象とする。

(2) これまでの研究では，一つの素数 p を固定して G の p-部分群全体（p-複体）を考察することが主流であった。一方で，p-複体と q-複体を同時に扱い，p と q の接着具合を考察することも極めて重要である。そこで，我々はより一般に，素数の集合πに対して G のベキ零π-部分群全体 Nπ(G) に着目しその位相的性質を解析する。

(3) 本研究の基本対象は，部分群族であり，そこから導かれるクイバーや付随するパス代数である。パス代数は，一般に，R-加群として R-自由基底を持つ R-代数である。このような状況は群 G の群代数 RG などでも見られる。そこで，R-自由基底を有する R-代数のホモロジーに関する一般論を開発・整備する。これは本研究，或いは今後に引き継がれる研究，の基盤となる。

４．研究成果

(1) 任意のクイバー Q と重み関数 w に対して Z-代数 UD(Q,w) を導入した。これは，Q の頂点全体で生成される Z-自由加群を V としたとき，Q のパスに沿って誘導される V の自己準同形写像全体で生成される Z-代数のことである。この代数には，Q の頂点がどのようにパスによって結ばれているかという情報が十分に反映されている。

① UD(Q,w) の代数構造を完全に決定した。特に UD(Q,w) を行列表示した場合，各成分には，ある単項イデアルが張り付くことになる。その生成元を生成定数と名付ける。

② ①の一般論を，群 G の部分群全体 Sgp(G) から定義されるクイバー QG に応用した。この場合に重み関数 wG は部分群の間の指数で定義する。まず UD(QG,wG) の生成定数は |G| の約数であることを証明した。また生成定数が |G| であるための必要十分条件は，対応する部分群 A,B に対して，G=AB かつ A∩B=1 であることを証明した。さらに，あるベキ零部分群 A,B に対する生成定数が |G| ならば G は可解群であることを証明した。

③ ①の一般論を G の複素既約指標から定義されるクイバー Qch に応用した。この場合の重み関数 wch は既約指標の重複度で定義する。まず重み関数 wch を用いて可換群 G を特徴付けた。また UD(Qch,wch) の生成定数は全ての有限群 G に対して 1 であることを証明した。

(2) 任意のクイバー Q と Q に於けるパスの族 H を取る。パス σ∈H を構成する頂点の集合をΔ(σ)で表す。このときΔ(σ)(σ∈H)の和集合を頂点集合とし，各Δ(σ)の空でない部分集合全体を単体集合とするような抽象単体複体 T(Q,H) を導入し，これをパス複体と名付ける。これは所謂 部分群複体の概念を含むことから，より多角的な考察が可能となる。

① 一般論として，パス複体 T(Q,H) が可縮となるための十分条件を与えた。また T(Q,H) に付随するホモロジーを新たに導入し，その基礎を整備した。

② 有限群 G に着目し，G の部分群によるコセット全体から定義されるクイバー cQ を考察した。まず cQ に於ける特殊な Up-Down パスの族 K に対して，T(cQ,K) のオイラー標数とホモロジーの計算を遂行した。また，K に付随するコセット幾何の自己同形群は，いくつかの T(cQ,K) に於ける自己同形群の共通部分として表されることを証明した。さらに，T(cQ,K) に含まれる連結成分の個数は，K の構成要素で生成される部分群の G に於ける指数と一致することを証明した。

(3) R-自由基底 B を持つような R-代数 A に付随するホモロジー R-加群 H(A,B)を新たに導入し，その基礎理論を整備した。

① クイバー Q のホモロジー H(Q) がある種の H(A,B) として実現されることを証明した。

② A の表現 φ から誘導されるホモロジー H(φ(A),φ(B)) を定義した。さらに，これは UD(G,w) に関するホモロジーの概念を含むことを証明した。

③ 具体的な H(A,B) の計算として，A がパス代数，行列代数，群代数，指標環，半束の結合代数の場合を詳細に扱った。

(4) p-複体と q-複体を同時に扱う手段として，素数の集合πに対し，有限群 G のベキ零π-部分群全体 Nπ(G) を研究対象とした。

① 代数的位相幾何の観点から，Nπ(G) と互いにホモトピー同値になるような極小部分複体 Lπ(G) を特定した。具体的に Lπ(G) は $O_\pi Z N_G(U)<U$ を満たすような Nπ(G) の要素全体から構成される。この部分群は，有限群論に於いて重要な，p-ラジカル部分群や p-中心化部分群の概念を含む。

② 具体例として G が対称群の場合と，一般線形群の場合で，Lπ(G) を分類した。

③ 素数の集合πが，交わりのないπ1 とπ2 の和集合である場合を設定する。このと

き Lπ(G), Lπ1(G), Lπ2(G) が相互に関わるホモトピー同値性を証明した。この同値性は L を N に置き換えても成立する，極めて基本的なホモトピーの性質である。さらにこの応用としてマイヤー・ビエトリス系列を用いたホモロジー群 H(Nπ(G))=N(Lπ(G))の計算を実行した。この計算は，当初の予想通り，π1 と π2 が交わる部分のホモロジーの計算に帰着される。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

① Nobuo Iiyori and Masato Sawabe,
Homology of a certain associative algebra,
Hokkaido Mathematical Journal,
査読有り
2017 年　掲載予定.

② Nobuo Iiyori and Masato Sawabe,
Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups,
Osaka Journal of Mathematics,
査読有り
53 巻, 2016 年, 731-750 項.

③ Nobuo Iiyori and Masato Sawabe,
Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups,
Osaka Journal of Mathematics,
査読有り
52 巻, 2015 年, 161-204 項.

④ Nobuo Iiyori and Masato Sawabe,
Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters,
Tokyo Journal of Mathematics,
査読有り
37 巻, 2014 年, 37-59 項.

〔学会発表〕（計５件）

① 小田文仁・澤邉正人,
Subgroup of the unit group of partial Burnside ring of an alternating group,
有限群のコホモロジー論とその周辺,
2017 年 2 月 17 日
京都大学数理解析研究所（京都）.

② 飯寄信保・澤邉正人,
Quiver representations, group characters, and prime graphs,
有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究, 2016 年 12 月 5 日,
京都大学数理解析研究所（京都）.

③澤邉正人,
Subgroup complexes of nilpotent Subgroups,
有限群のコホモロジー論とその周辺,
2015 年 2 月 20 日,
京都大学数理解析研究所（京都）.

④ 澤邉正人,
複素既約指標の生成定数は１である,
第３１回代数的組合せ論シンポジウム,
2014 年 6 月 19 日,
東北大学（仙台）.

⑤ 澤邉正人,
有限群の Up-Down パスから得られる単体複体について,
第３０回代数的組合せ論シンポジウム,
2013 年 6 月 24 日,
静岡大学（静岡）.

６．研究組織

(1)研究代表者

澤邉　正人（SAWABE MASATO）
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号：６０３４６６２４