

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400007

研究課題名(和文) 数論的な多様体のL関数とモチーフ的コホモロジーおよび円分体論への応用

研究課題名(英文) L-functions and motivic cohomology of arithmetic varieties and applications to cyclotomic fields

研究代表者

大坪 紀之(Otsubo, Noriyuki)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60332566

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：数論的な多様体のL関数とモチーフ的コホモロジーとの関係、またその円分体論への応用を研究した。とくに、円分体のヘッケL関数の特殊値とフェルマー曲線のモチーフ的コホモロジーとの新たな関係を、一般超幾何関数を用いて示した。また、超幾何ファイブレーションという多様体族を新たに定義し、その周期に対するGross-Deligne予想を証明し、そのレギュレーターを一般超幾何関数を用いて表すことができた。さらに、フェルマー曲線塔の副有限ホモロジー群の構造を決定し、それを用いて、Ihara-AndersonによるJacobi和の普遍測度の、簡明な構成を与えた。

研究成果の概要(英文)：We studied relations between L-functions of arithmetic varieties and their applications to cyclotomic fields. In particular, we obtained new relations between special values of Hecke L-functions of cyclotomic fields and motivic cohomology of Fermat motives, in terms of generalized hypergeometric functions. On the other hand, we defined a new class of families of varieties called hypergeometric fibrations, and for such families, proved the Gross-Deligne conjecture on periods and expressed the regulators in terms of generalized hypergeometric functions. Moreover, we determined the structure of the profinite homology of the tower of Fermat curves, and by using this, gave a simple construction of Ihara-Anderson's universal measure of Jacobi sums.

研究分野：数論幾何学

キーワード：モチーフ L関数 モチーフ的コホモロジー 超幾何関数

1. 研究開始当初の背景

1.1 モチーフの L 関数

モチーフの L 関数は数論における最も重要な対象の一つである。モチーフとは、代数多様体を代数対応によって分解したものであり、たとえば楕円曲線や保型形式に付随する、数論幾何的な対象である。モチーフには様々なコホモロジーが付随するが、1 進コホモロジーによって、モチーフの L 関数が定義される。その最も基本的な例がリーマン・ゼータ関数を含む、代数体のデデキンド・ゼータ関数である。リーマン・ゼータ関数が素数の分布についての重要な情報を包摂しているように、モチーフの L 関数にはそのモチーフの数論的な様々な性質が反映される。

1.2 主予想

モチーフの L 関数の振る舞い、とくにその整数点における特殊値に関しては、様々な大予想がある。それらは 1960 頃から 1990 頃までに提唱された、バーチ・スウィナートンダイアー予想 (BSD 予想)、テイト予想、ベイリンソン予想、ブロック・加藤予想などである。その原型はデデキンド・ゼータ関数の $s=0$ での特殊値に関する古典的な解析的類数公式である。これらの予想はいずれも、L 関数の特殊値という解析的な量を、コホモロジーという幾何的な不変量で記述するものであり、現代数学を支える基本的な哲学の一つとなっている。

1.3 一般超幾何関数

ベイリンソン予想 (ブロック・加藤予想) は、L 関数の特殊値を、モチーフのコホモロジーからドリーニュ・コホモロジー (p 進コホモロジー) へのレギュレーター写像 (p 進レギュレーター写像) によって記述する。本研究代表者は、以前の研究で、フェルマー曲線に付随するモチーフのレギュレーターが、一般化された超幾何関数の特殊値で表されるということを見出した (2011)。ほぼ同時期に、ズディリンによって、いくつかの楕円曲線の L 関数の特殊値が、やはり一般超幾何関数の特殊値で表されることが示された。

1.4 期待されること

一般には、L 関数の特殊値もレギュレーターも、計算が困難なものである。しかし、それらが一般超幾何関数という、よく研究されている特殊関数と結びつくことは、この分野の研究に新しい方法を (少なくとも一定の範囲の対象に対しては) 示している。したがって、超幾何関数論のベイリンソン予想、ブロック・加藤予想など、数論へのさらなる応用が期待されていた。

2. 研究の目的

2.1 概要

当研究の大きな目的は、数論的な L 関数とモチーフのコホモロジーに関する上記の主予想 (ベイリンソン予想、ブロック・加藤予想など) に関して、新たな結果を得ることであった。そのために、モチーフの L 関数の特殊値やレギュレーター写像、アーベル・ヤコビ写像などと、一般超幾何関数との関係を明らかにすることであった。またその p 進的な類似の研究や、円分体論の研究への応用も目的としていた。

2.2 L 関数の研究

フェルマー曲線に付随するモチーフの L 関数の特殊値と一般超幾何関数との関係を、より一般に研究する。そのために、高次のラムヌジャン・テータ関数の関係式を研究する。とくに、クライン曲線に付随する次数 7 の場合を詳しく調べる。

2.3 レギュレーターの研究

それまでの研究を拡張するために、モチーフのコホモロジーにより多くの元を構成する方法を研究する。とくに、フェルマー曲線の被覆を用いる。そして、それらのレギュレーターを求め、一般超幾何関数との関係を研究する。

2.3 p 進類似の研究

また上記の研究の p 進的な類似 (p は素数) つまり p 進的な一般超幾何関数を用いて p 進レギュレーターと p 進 L 関数を研究する。

2.4 円分体論への応用

上記の研究は、ヤコビ和に付随する円分体のヘッケ L 関数の研究であると言える。したがって、上記の研究は円分体論に応用されると期待され、それも目的の一つであった。

3. 研究の方法

3.1 レギュレーター

当初は、フェルマー曲線に対するそれまでの手法の一般化を模索し、ある程度の進展を得ていた。しかし、2014 年から始めた朝倉政典氏との共同研究で、ファイブレーションを持つ多様体 (つまり多様体の族) のレギュレーターに一般超幾何関数が現れることが分かり、そのような対象を中心に研究を進めることになった。

3.2 L 関数

ズディリン氏と、研究代表者が指導する伊東良純氏によって、虚数乗法を持つ楕円曲線の場合に、L 関数の特殊値を直接一般超幾何関数で表す手法が示された。この手法をより高次元の場合、またより一般の特殊値の場合へと一般化する研究を行った。そのために、虚数乗法を持つテータ関数の基礎的な研究を行った。

3.3 共同研究

超幾何ファイブレーションのレギュレーターの研究は朝倉政典氏(北大)と共同で行った。その一部は朝倉氏、寺杣友秀氏(東大)と共同で行った。

3.4 発表・研究集会の開催

得られた成果は研究集会等で発表し、さらに発展させるべく、専門家との討論を行った。また、関連する研究について最新の知見を得、発展させるために、レギュレーターに関する研究集会を2015年と2017年に開催した。

4. 研究成果

4.1 ベイリンソン予想

まず、論文では、レギュレーターが超幾何関数で表される場合を拡張し、その場合に、レギュレーターとL関数の双方を数値計算し、比較した。その結果ベイリンソン予想が数値的に成り立つ例を多く与えた。

4.2 フェルマー塔とヤコビ和

上記の研究では、フェルマー曲線のホモロジー群を精密に理解する必要があった。そのためにフェルマー曲線の塔のホモロジー群の構造を決定し、円分体のヤコビ和の研究に応用した(下記論文)。

4.3 ガウス型の超幾何ファイブレーション

論文では、ガウス型の超幾何ファイブレーションに対して、その周期とレギュレーターを計算し、ともに一般超幾何関数の特殊値で表されることを示した。その結果、周期に対するグロス・ドリーニュ予想を証明し、後者に対しては非消滅性を示した。

4.4 一般の超幾何ファイブレーション

論文では、上の結果を一般の超幾何ファイブレーションに拡張し、同様に周期に対す

るグロス・ドリーニュ予想を証明し、レギュレーターを一般超幾何関数を用いて記述した。

この研究はさらに発展し、現在、朝倉氏との共著で2本(うち1本は受理済み)、朝倉氏、寺杣友秀氏との共著で1本の論文を投稿中である。

4.5 研究集会

レギュレーターに関する2回の研究集会では、L関数、モチーフ、レギュレーターなどに関する数論幾何学の最新の知見を多く得ることができ、また参加者との活発な討論により、当研究の推進に役立てることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo,
CM periods, CM regulators and
hypergeometric functions, II, Math. Z.
(Online First), 31 pages. 査読有
<https://doi.org/10.1007/s00209-017-2001-1>

Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo,
CM periods, CM regulators, and
hypergeometric functions, I, Canad. J.
Math. 70 (2018), 481-514. 査読有
<http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2017-008-6>

Noriyuki Otsubo, Homology of the
Fermat tower and universal measures
for Jacobi sums, Canad. Math. Bull.,
59 (2016), 624-640. 査読有
<http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2016-012-0>

Noriyuki Otsubo, On special values of
Jacobi-sum Hecke L-functions, Experim.
Math. 24 (2015), 247-259. 査読有
<http://dx.doi.org/10.1080/10586458.2014.971199>

[学会発表](計16件)

Noriyuki Otsubo, “Regulators and hypergeometric functions”, UK-Japan Winter School on Number Theory, King’s College London, 2018.1.9.

Noriyuki Otsubo, “Regulators of hypergeometric fibrations”, 10th Arithmetic and Algebraic Geometry, 東京大学, 2016.12.15.

大坪紀之, “虚数乗法を持つモチーフの周期とレギュレーターについて”, 熊本大学談話会, 2016.11.9.

大坪紀之, “超幾何ファイブレーションの K_1 レギュレーター”, 第10回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2016.9.29.

Noriyuki Otsubo, “Complex multiplication and hypergeometric function”, Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2016, National Taiwan University, 2016.9.9.

大坪紀之, “虚数乗法を持つモチーフと超幾何関数”, 香川セミナー, 香川大学, 2016.8.27.

Noriyuki Otsubo, CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, Algebraic Geometry, Indian Statistical Institute Bangalore, Bangalore, India, 2015.12.14.

Noriyuki Otsubo, CM periods and hypergeometric functions, 5th East Asia Number Theory Conference, Chuncheon, Korea, 2015.8.26.

大坪紀之, Period conjecture of Gross-Deligne and a regulator formula for fibrations with complex multiplication, 整数論・保型形式セミナー, 大阪大学, 2015.5.29.

大坪紀之, CM regulators and hypergeometric functions, 数論幾何セミナー, 名古屋大学, 2015.1.15.

Noriyuki Otsubo, CM regulators, values of L-functions and hypergeometric functions, Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics 2014, 慶応大学, 2014.11.22.

Noriyuki Otsubo, CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, Workshop of Arithmetic Geometry in Tohoku, 東北大学, 2014.10.30.

Noriyuki Otsubo, Introduction to Heisenberg curves, GANITA Seminar, University of Toronto, 2014.7.3.

Noriyuki Otsubo, On the Beilinson conjecture for Fermat motives, Number Theory/Representation Theory Seminar, University of Toronto, 2014.1.8.

Noriyuki Otsubo, Algebraic cycles and generalized hypergeometric functions, GANITA Seminar, University of Toronto, 2013.10.31.

大坪紀之, Jacobi 和の微分と Bernoulli 数の類似について, 代数セミナー, 慶応大学, 2013.6.3.

[図書](計1件)

Atsushi Shiho, Tadashi Ochiai and Noriyuki Otsubo ed., Algebraic Number Theory and Related Topics 2012, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B51, RIMS Kyoto Univ., 2014.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-back.html>

〔その他〕

ホームページ等

Noriyuki Otsubo 's Home Page
<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~otsubo>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

大坪 紀之 (OTSUBO, Noriyuki)
千葉大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：60332566