様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４０００８

研究課題名（和文）過収束アイソクリスタルの研究

研究課題名（英文）Study on overconvergent isocrystals

研究代表者
志甫　淳（Shiho, Atsushi）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：３０２９２２０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：適切な状況で対数的過収束アイソクリスタルの圏から可積分接続付加群の圏への代数化関手のテンソル積との整合性を確かめた．pが冪零なスキーム上におけるOgus-Vologodsky対応の部分的な一般化を示した．エタール基本群が自明な代数多様体上のアイソクリスタルに関するde Jongの予想をある仮定の下で解いた．ある種の対数的代数多様体のドラーム基本群のある商に対する(最初の射の単射性も含めた)ホモトピー完全列を純代数的に構成した．ある種の対数的代数多様体の射に対する相対的副冪単ドラーム基本群について純代数的に研究し，p進的な応用も示した．p進微分方程式論の基本定理の証明の誤りの修正に取り組んだ．

研究成果の概要（英文）：We checked the compatibility of the algebraization functor from the category of log overconvergent isocrystals to that of modules with integrable connection with the formation of tensor products under certain assumption. We proved a partial generalization of Ogus-Vologodsky correspondence on schemes in which p is nilpotent. We proved under certain assumption a conjecture of de Jong on isocrystals on algebraic varieties with trivial etale fundamental group. We constructed in purely algebraic way the homotopy exact sequence (including the first injection) for certain quotient of de Rham fundamental groups of certain log algebraic varieties. We studied in purely algebraic way the relative pro-unipotent de Rham fundamental groups for certain morphisms of log algebraic varieties, and gave a p-adic application of it. We studied to fix errors in the proof of fundamental theorems in the theory of p-adic differential equations.

研究分野：数論幾何学

キーワード：アイソクリスタル　エタール基本群　ドラーム基本群　対数的代数多様体　p進微分方程式

１．研究開始当初の背景

(1) 標数 p>0 の代数多様体上の良いコホモロジー理論として，Grothendieck は l 進コホモロジー(l は p と異なる素数)の理論を構築し，大きな成果を挙げた．対応する p 進コホモロジー理論として，Berthelot はクリスタルコホモロジー，リジッドコホモロジーの理論を構築し，その係数として(過収束)アイソクリスタルという概念を定義した．これはある種の収束性をもつ p 進微分方程式であり，滑らかな l 進層の理論に類似した豊富な理論の存在が期待されるものである．1 次元穴あき円板上の p 進微分方程式については，p 進 Fuchs 定理，p 進局所モノドロミー定理等の重要な結果が Andre, Christol, Kedlaya, Mebkhout らにより得られている．また，有限体上に定義された曲線上の過収束 F アイソクリスタルに対しては，阿部知行により Langlands 対応に関する結果が得られつつあった．高次元の代数多様体上の過収束アイソクリスタルに対しては，Kedlaya による半安定還元定理や本研究者による対数的延長可能性の研究があったが，より詳しい研究を進めるべき状況であった．

(2) (過収束)アイソクリスタルのなす淡中圏の淡中双対であるクリスタル基本群を考察することは，Crew や本研究者の以前の研究において見られ，数論幾何学的な応用もある．しかしながら，位相幾何学と比べた場合，ホモトピー完全列などの基礎的結果が知られておらず，理論の進展は充分ではなかった．標数 0 における類似であるドラーム基本群の場合には，dos Santos, Lei Zhang によりホモトピー完全列が知られているが，代数多様体が退化している場合(対数的代数多様体の場合)の結果は知られておらず，また，位相幾何学における基本群に対する操作の類似を代数幾何学において行う際に対数的代数多様体の場合の研究も重要であると思われた．

２．研究の目的

(1) 標数 p>0 の高次元の代数多様体上の(過収束)アイソクリスタルや関連する p 進的対象の性質を調べることを研究目的とした．その一つは過収束アイソクリスタルの微分 Artin 導手の研究である．また，Katz,Crew や都築暢夫により(過収束)アイソクリスタルとエタール基本群との関連が知られ，また Ogus-Vologodsky により標数 p>0 の微分加群と Higgs 加群との関連が知られているので，エタール基本群あるいは Higgs 加群の p 進的な研究も目標とした．

(2) 過収束アイソクリスタルの圏の定める基本群に対するホモトピー完全列やその数論幾何的応用の研究の前段階として，標数 0 の適当な条件を満たす対数的代数多様体に対するドラーム基本群の定義やホモトピー完全列の研究を純代数的に行うことを研究目的とした．

３．研究の方法

(1) まず，研究開始時点で本質的に得られていた２つの結果について，論文の修正，投稿を行った．具体的には，研究成果(1)にある，適当な状況で対数的過収束アイソクリスタルの圏から可積分接続付加群の圏への代数化関手のテンソル積との整合性を確かめた結果と，研究成果(2)にある，p が冪零なスキーム上における Ogus-Vologodsky 対応の部分的な一般化についての結果である．

(2) また，標数 p>0 の滑らかな代数多様体上の過収束アイソクリスタルの微分 Artin 導手の研究(研究成果(7))を，本研究者の以前の研究と Kedlaya，Xiao の多変数 p 進微分方程式の理論を用いることにより行った．

(3) また，研究成果(4)にある，ある種の対数的代数多様体のドラーム基本群のある商に対する(最初の射の単射性も含めた)ホモトピー完全列の純代数的な構成の研究を進めた．対数的代数多様体に対して研究する所が新しく，また，純代数的に考えるのは，将来の p 進類似の研究の場合に重要になるからである．「最初の射の単射性」の部分が難しく，かつ興味深い点であるが，これは「最初の射の単射性が成り立つような圏の構成」と「その圏ともとの圏との比較」によりなされる．対数的ドラームコホモロジーのモノドロミー作用素の構成などが手掛かりになっているが，証明にはいろいろ工夫が必要であった．これは共同研究であり，主に電子メールによるやりとりで行われた．

(4) 研究期間中に B. Chiarellotto 氏と研究討論を行う機会を持った．その際に，Andreatta-Iovita-Kim が示した双曲的曲線の p 進良還元判定条件の証明が最終的には超越的(位相幾何的)な議論に依存することを確認し，代数的な証明が可能であるかどうかを検討することとなった．深い思索および様々な文献の検討の結果，相対的な副冪単基本群の今までに知られているいくつかの定義を対数的代数多様体の場合に拡張し，かつそれらの定義の同値性を示すことが鍵であり，かつそれ自身面白い課題である，との考えに至り，それを示すための研究を行った(研究成果(5))．先行研究のままではうまくいかない部分や先行研究において不確かな記述である部分もあり苦労したが，長い時間をかけて研究を行った．上記(3)の研究とも関連する課題なので，V. Di Proietto 氏を含めた３人の共同研究となった．共同研究は電子メールの他に，何回か実際に会って集中的に討論を行うことによりなされている．

(5) 研究期間中に H. Esnault 氏と研究討論をする機会を得て，その際にエタール基本群が自明な代数閉体上の射影的かつ平滑な代数多様体上のアイソクリスタルは自明なものしかないという de Jong の予想を知ることとなった．de Jong の予想の元となるのは，この予想の標数 p 版である Gieseker 予想であり，これは Esnault-Mehta により解決され

ている．Esnault-Mehta の結果をそのまま p 進的な場合に持ち上げても特別な場合以外の de Jong の予想の証明は期待できないが，しかし，数論幾何，代数幾何の文献の検討を含む深い思索の結果，Frobenius 射を利用して捻りつつ Esnault-Mehta の議論や結果を持ち上げるという独創的な着想を得た．これにより，まだある種の仮定がついてしまうが，適当な条件下で de Jong の予想を証明することができた(研究成果(3))．また，証明においてクリスタルの法 p 還元のチャーン類の消滅が重要であることに気づいたので，ある種の仮定の下で，いろいろな方法でこれを示した．これは Esnault 氏との共同研究であるが，研究は頻繁な電子メールのやりとりの他に，実際に何度か会って，集中的に討論を行うことによりなされている．
(6) p 進微分方程式論の基本定理である p 進 Fuchs 定理および p 進局所モノドロミー定理のより強いヴァージョンが示されている Kedlaya の論文を読んでいるときに，その証明に不完全な所があるのに気づき，本人に連絡をとって電子メールで議論した．その結果，論文の中のある命題が誤りであることがわかった．重要な定理なので証明を共同で直すこととなり，一部については修正ができた(研究成果(6))．共同研究は電子メールによる議論で行われた．
(7) 以上の研究で得られた結果について，国内外の研究集会で発表を行い，研究成果の発信に努めた．

４．研究成果
(1) 混標数(0,p)の完備離散付値環上の開半安定還元スキームの特殊ファイバー上の対数的過収束アイソクリスタルで縁に沿って適切な対数的延長可能性の条件を満たすもののなす圏から一般ファイバー上の可積分接続付加群で縁に沿って同様の条件を満たすもののなす圏への代数化関手という忠実充満関手が対数的延長関手，対数的代数化関手，制限関手の合成により定義される．途中の関手はテンソル積と整合的であるとは言えないが，合成した関手はテンソル積と整合的であり，従って対応する淡中双対の全射を定めるということを示した．(V. Di Proietto 氏との共同研究) これは「研究の目的」欄 における(1)，(2)の融合的な研究であるといえる．この結果の本質的部分は研究開始時に得られていたが，研究期間中に論文の修正を行い，出版に至った．これは p 進微分方程式の対数的延長性の延長の仕方(枝)を注意深く取り扱った論文であり，そこに独創性がある．技巧的で面白い結果である．
(2) p が冪零かつ滑らかなスキーム X の Frobenius 捻り上の準冪零可積分 p 接続付加群の圏と X 上の準冪零可積分接続付加群の圏との圏同値を示した．これは標数 p の滑らかなスキーム X の Frobenius 捻り上の準冪零 Higgs 加群の圏と X 上の準冪零可積分接続付加群との圏同値を示した，局所的な意味での Ogus-Vologodsky 対応(局所 Cartier 変換)の部分的な一般化である．これも本質的な部分は研究開始時に得られていたが，論文の改訂を行い，投稿し，出版へと至った．Ogus-Vologodsky の結果を p 進的に持ち上げようと試みる結果であり，そこに独創性がある．一方で，p 進的に研究が発達している p 進 Simpson 対応との関連も期待される．本研究の出版後，非常に最近になって，この結果と整合的でより大域的な結果が Daxin Xu 氏により得られている．
(3) X を正標数の代数閉体上の射影的平滑な代数多様体でエタール基本群が自明なものとするとき，X 上のアイソクリスタル E は自明なものしかないだろうという予想が de Jong により提出されている．これはエタール基本群とアイソクリスタルとのある関連を予想したものと言える．X の微分加群の最大スロープが非正のとき，この予想が，E が収束アイソクリスタルであるかまたは局所自由なクリスタルに伴うという条件下で正しいことを証明した．証明において，局所自由クリスタルの法 p 還元として得られる局所自由層のチャーン類の消滅を 2 通りの方法で証明した．また，幾何学的に定義される収束アイソクリスタルに対しては予想が正しいことを証明した．(H. Esnault 氏との共同研究) 論文を２本書き，いずれも投稿中である．この結果の証明は標数 p の代数幾何学，モジュライ，安定性の結果を p 進数論幾何学に適用するという点で新しく，非常に画期的であると考える．我々の論文の発表後に，収束アイソクリスタルが有限体上のモデルから生じていてかつ Frobenius 構造を持つ場合には，de Jong の予想が阿部-Esnault，Kedlaya により示されているが，その証明は数論幾何的であり，我々のものとはかなり異なる．予想は一般にはまだ未解決なので，今後，更に研究を進める必要がある．
(4) 標数 0 の標準的対数点上の正規交叉対数的代数多様体に対するドラーム基本群のホモトピー完全列を純代数的に構成し，幾何的副三角化可能商に対しての最初の射の単射性を示した．(V. Di Proietto 氏との共同研究) この論文は現在投稿中である．この論文は対数的代数多様体という退化した状況で副冪単と限らないドラーム基本群を考えた最初の論文であり，そこに独創性がある．基本的ではあるがなかなか技巧的で，重要な結果である．
(5) 適切な条件を満たす標数 0 の対数的代数多様体の切断付きの射 f に対して，その相対的な副冪単ドラーム基本群を様々な方法で定義し，それらが一致することを純代数的に証明した．その応用として，f が安定対数的曲線のときの副冪単ドラーム基本群へのモノドロミー作用を純代数的に記述し，それを用いて，Andreatta-Iovita-Kim が示した双曲的曲線の p 進良還元判定条件の証明における

超越的(位相幾何的)部分に純代数的証明を与えた.(B. Chiarellotto 氏, V. Di Proietto 氏との共同研究）これについての論文は執筆中である．この結果は，まず数種のアプローチがある相対的副冪単基本群の定義が適切な対数的代数多様体の射に対して可能であること，また，それらの定義が実際に一致していることを示したという意味で大変重要である．また，安定対数的曲線に対して，本来位相幾何的に行われていた副冪単基本群へのモノドロミー作用の計算が淡中圏的に実行可能であり，それにより双曲的曲線の p 進良還元判定条件が代数的に証明できるということも重要である．証明手法のいくつかは他の基本群理論にも適用できるのではないかと思われるので，それが次の研究課題である．

(6) p 進穴あき円板上の可解な p 進微分方程式論の基本定理として，Robba 条件とある種の p 進非 Liouville 性を満たす p 進微分方程式の構造を述べた p 進 Fuchs 定理と，Frobenius 構造を持つ一般の p 進微分方程式の構造を述べた p 進局所モノドロミー定理がある．この二つの定理の強いヴァージョンが Kedlaya により示されていた．前者においては p 進非 Liouville 性の概念をある意味で弱めて「Liouville 分割」の概念を用いて述べたものであり，後者については Frobenius 構造の条件を外したものである．この結果に対して，彼の論文における証明の不完全な所や誤りを指摘し, その修正に取り組んだ.(K. S. Kedlaya 氏との共同研究）また，p 進 Fuchs 定理の強いヴァージョンについては修正が出来た．上記二つの定理は p 進微分方程式論において重要な基本定理であり，従ってその証明を直すことは極めて重要である．また，修正の過程で，Robba 条件に似た条件を満たす，p 進微分方程式よりやや弱い構造しかない加群に対して p 進指数の存在を示したことは，技巧的であるが興味深い結果である．

(7) 標数 p>0 の滑らかな代数多様体上の過収束アイソクリスタルの微分 Artin 導手が多くの曲線への制限の微分 Artin 導手と一致することを示した．しかし論文を執筆するまでには至っていない．より深い研究が今後の課題である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ２ 件）

① A.Shiho Notes on generalizations of local Ogus-Vologodsky correspondence, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22(2015), 793-875.
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/pdf/jms220306.pdf

② V.Di Proietto and A.Shiho,On p-adic diffenrential equations on semistable varieties II, Manuscripta Mathematica 146(2015), 179--199.
DOI: 10.1007/s00229-014-0691-9

〔学会発表〕（計 １２ 件）

① A.Shiho, Comparison of relatively unipotent log de Rham fundamental groups,Guest Seminar, 2016 年 11 月 24 日．ベルリン(ドイツ),

② A.Shiho, Isocrystals on simply connected varieties,East Asia Number Theory Conference, 2016 年 8 月 24 日, 天津(中国).

③ 志甫　淳， Isocrystals on simply connected varieties, ワークショップ「p 進コホモロジーと数論幾何学」, 2016 年 7 月 29 日，東京電機大学(東京都足立区).

④ A.Shiho, Isocrystals on simply connected varieties, 2016 Seoul Tokyo Conference on Number Theory, 2016 年 6 月 16 日，ソウル(韓国).

⑤ A.Shiho, Convergent isocrystals on simply connected varieties, Workshop on recent trends in p-adic cohomology, 2015 年 3 月 25 日, ロンドン(イギリス).

⑥ A.Shiho, On differential Artin conductor of overconvergent isocrystals, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 2014 年 1 月 30 日，東京大学(東京都目黒区).

⑦ A.Shiho, On homotopy exact sequence for log de Rham fundamental groups, p-adic cohomology and its applications 2014, 2014 年 1 月 7 日，東北大学(仙台市青葉区).

⑧ A. Shiho, On the differential Artin conductor of overconvergent isocrystals, Seminario Padova geometria algebrica aritmetica, 2013 年 11 月 7 日．パドヴァ(イタリア).

⑨ 志甫 淳，p 進微分方程式と係数つきリジッドコホモロジー，談話会，2013 年 10 月 21 日，大阪大学(大阪府豊中市)

⑩ 志甫　淳, On a generalization of local Ogus-Vologodsky correspondence，豊田中央研数学コロキウム，2013 年 4 月 25 日，豊田中央研究所(愛知県長久手市).

⑪ 志甫　淳 ,On restriction of overconvergent isocrystals, 豊田中央研数学コロキウム, 2013 年 4 月 25 日，豊田中央研究所(愛知県長久手市).

⑫ 志甫　淳，p 進数と p 進微分方程式，豊田中央研数学コロキウム, 2013 年 4 月 25 日，豊田中央研究所(愛知県長久手市).

６．研究組織

(1)研究代表者

志甫　淳（SHIHO, Atsushi）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：３０２９２２０４