

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2013～2016
 課題番号：25400009
 研究課題名(和文) 非半単純共形場理論と頂点作用素代数の表現論

研究課題名(英文) Vertex operator algebras and quantum group

研究代表者

土屋 昭博 (TSUCHIYA, AKIHIRO)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・上級科学研究員

研究者番号：90022673

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)： A1型頂点作用素代数とヴィラソロScreening作用素の多重積のSelberg型ねじれたde Rhamの近接サイクルを使って定義されるヴィラソロまつわり作用素を使ってA1型拡大W代数が定義される。この拡大W代数のアーベル圏の構造、特にそれが有限個の既約表現をもつこと、およびその構造決定をS. Wood氏と共同で調べ、2015年の国際学会誌に発表した。

最近この方法を整理・精密化することにより、A1型格子頂点作用素代数の超対称拡大を定義した。さらに、そのアーベル圏は有限個の単純対称を持ち、アーベル圏として半単純である。この結果の論文は現在準備中であり、近々国際専門誌に投稿予定である。

研究成果の概要(英文)： By using Lattice VOA of type A1 and Virasoro Screening operators, we defined extended W-algebra of A1-type. We use the Virasoro intertwining operators defined by iterative multi proceed of screening operators using nearly cycles of twisted de Rham theory of Selberg type. We analyzed the structure of abelian categories of modules of these extended W-algebras. These abelian categories have finite number of simple objects, and we could determine these structures. These results we published on international journal in 2015. Thereafter, we reconsidered these results and calculations. We define super symmetries extension of lattice VOA of A1 type. Furthermore, we analyzed the structures of this abelian categories of module of this super symmetric VOA. In other words, abelian category has finite number of simple objects and semi-simple as abelian categories.

We are now preparing the paper, and we would like to contribute in some international journals.

研究分野：数物系化学

キーワード：頂点作用素代数 共形場理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

共形場理論は 1980 年代前半にロシアの 3 人の物理学者 Belavin-Polyakov-Zamolodnikov により統計物理学における 2 次元臨界現象を記述する場の量子論として始められた。これは当時、数学者 V. Kac 氏や Feigin-Fuchs 氏により展開された Virasoro 代数の中心電荷 $C_{p+,p-}$ (ここに $p+,p-$ は 2 以上の正の整数) における表現論 (いわゆる極小系列) を使って物理的に重要な臨界指数を表現論における共形次元と同定しただけでなく、主要場の N 点関数系を完全に特徴づける確定特異点型偏微分方程式系を導いた。

その後、数学側からもヴィラソロ代数やアファイン・リー環の表現論をリーマン面の Moduli 空間上で展開することで、代数解析における D 加群の方法を使うことにより、リーマン面場の共形場理論が展開された。

このことにより、組み紐群や写像類群の共形ブロックによる Monodromy 表現が現れ、低次元位相幾何学における結び目やからみ目、3次元多様体の量子不変量との関係も明らかにされた。一方、ブレイド群の表現は 1 の巾根における Hecke 環の表現論と関係づけられ、さらに量子群との関係も明らかになり始めた。このようにして、共形場理論は現代数学と数理物理学を関係づける重要な地位を確立した。一方、共形場理論における最も重要な概念である場の作用素の局所性や作用素展開は頂点作用素代数として代数化され、Borchard 氏達によるモンスター群の理論にも利用されるに至った。このようにして、共形場理論の代数的側面としての頂点作用素代数の表現論とそれに基づく共形場理論の展開が始まった。

ところで、頂点作用素代数によるリーマン面上の共形場理論が展開されるためには、頂点作用素代数は適当な有限性条件を満たす必要がある。この有限性条件は、1990 年代始め、I. Frenkel-Zhu 両氏により提案され C_2 有限性条件をもつ頂点作用素代数の表現論が展開され始めた。

2. 研究の目的

- (1) 共形場理論を頂点作用素代数の表現論に基づいて展開されるためには、この

頂点作用素代数の表現論全体の作るアーベル圏が、既約表現の数が有限個である等の強い有限性をもつ必要がある。 C_2 有限性条件のもとではこのアーベル圏は既約表現の数は有限個であるが、アーベル圏としては必ずしも半単純にならない。上に述べたヴィラソロ代数の極小系列やアファイン・リー環の可積分表現の場合、このアーベル圏は既約表現の数は有限個であり、アーベル圏としても半単純でない。

2000 年代始めより、私は永友清和氏と共同で C_2 有限性条件をもつ頂点作用素代数の表現論に基づく射影直線上の共形場理論の研究を始めた。この時私の頭にあったのは、Kazdan-Lustig 両氏により 1994 年度に展開された Cherdly 群の表現、1 の巾根における量子群の表現論、アファイン・リー環の負の有理レベルにおける共形場理論を使った表現論の密接な関係を表す三位一体論であった。

この場合、1 の巾根における量子群の表現論や負の有理レベルにおける表現論は、表現のつくるアーベル圏半単純とはならない。

この Kazdan-Lustig の論文は、200 ページにわたる大論文である。この論文の 1 つのキーポイントは共形場理論における KZ 方程式であった。我々は、この論文の結論を参考にしながら C_2 有限性条件を満たす良い頂点作用素代数とその表現論の展開に踏み出した。2005 年ころからのことである

- (2) 自由場表示と Screening 作用素代数を用いた頂点作用素代数の展開

1980 年代より Virasoro 代数やアファイン・リー環、およびその変形である W 代数の表現の研究に用いられていた方法として、自由場表示と Screening 作用素による研究がある。これはいわゆる Heisenberg 代数 (自由場表示ともいわれる) と Screening 作用素の多重積の積分表示により定義される Virasoro まつわり作用素を使った Virasoro 代数やその拡張である無限次元代数の表現論の研究である。

ここでは自由場表示を使って射影直

線上での共形場理論を展開し、Screening 作用素と呼ばれる場の作用素の多重積分を使って定義される Virasoro まつわり作用素が重要となる。この Screening 作用素の多重積分は射影直線上の超平面配置空間上で Selberg 型核関数によって定義されるねじれた de Rham 圏論を使って Virasoro まつわり作用素は定義される。私は、1986 年蟹江幸博氏とこの研究を始めた。

ところで、我々の必要な C_2 有限性条件をもつ場合は、この Rham 理論は非常に複雑となる。この難点は、2010 年頃考えている係数を複素数体 C から離数付置環 $C[[z]]$ に持ち上げ、理論の $0 = C[[z]]$ 整数値を示し、 $\neq 0$ とおく、いわゆる関数正則化の理論を展開することから理論展開が一気に進むことになった。

(3) 正の有理レベルにおける A_1 型拡大 W 代数の構成と表現論の研究

2010 年以降、私は S. Wood 氏と共同で A_1 型格子頂点作用素代数の自由場表示とそこにおける 2 つの Screening 作用素の Selberg 型積分によって定義される Virasoro まつわり作用素を使って A_1 型拡大 W 代数の定義とその表現論の研究を始めた。この研究は、元々 B. Feigin 氏達 4 人の数学者により 2006 年頃より研究されていたものがある。しかし、この論文の Selberg 積分のところは納得いかなかった。

私は上記の基礎環を C から離数付置環上に持ち上げて考える。近接ホモロジーサイクルの理論を使って、この Selberg 積分の理論を整理し、Feigin 氏達 4 人の仕事の見直しと整理を行った。この内容の主要部は、2015 年 S. Wood 氏と共同で国際会議で発表した。

3 . 研究の方法

互いに素な 2 以上の正の整数の組 (p, q) に対し定義される正の有理レベルにおける A_1 型拡大 W 代数の構成とその表現論の研究問題は、 A_1 型拡大 W 代数 M を定義し、その C_2 有限性を証明し、表現のつくるアーベル圏の性質、特にその全ての有限個

の既約表現を具体的に構成し、その構造を明らかにすること。さらに、頂点作用素代数 M に従う P_1 上の共形場理論を使って定義される表現のつくるアーベル環上の Tensor 圏としての構造を明らかにし、さらには、1 の巾根における Affine Hecke 環や量子群の表現論との関係を明らかにすること、楕円曲線上の共形場理論の Monodromy 表現より生じる $SL_2(\mathbb{Z})$ の表現と Fusion 代数との関係について述べた、いわゆる Verlinde 予想のこの場合の形を明確にし、それを証明すること、等が具体的問題として明瞭になってきた。

現在までのところ、上記 まではかなり具体的に展開することができている。これが 2015 年 S. Wood 氏と共同で発表した内容である。

4 . 研究成果

(1) (p, q) で $q=1$ の場合には

S. Wood 氏との共同研究に先立って、永友清和氏と共同で M の場の表現の圏の具体的構造については上記のレベルまでは研究を行い、をなした。さらに、この場合の Tensor 圏の構造については S. Wood 氏と共同で研究を行い、これもすでに発表済みである。このことは、2012 年北京で開かれた国際共同研究集会で発表済みである。

(2) 一般の (p, q) の場合には

上記 S. Wood 氏との共同著作で Screening 作用素の重複した Selberg 積分の発散のくりこみは、上記理論を C より $0 = C[[z]]$ 上に持ち上げ、関数正則化を用いて積分を定義し、その積分値の 0 整値性を証明し、 $\neq 0$ とし、くりこまれた近接ホモロジーサイクルの理論を作り、上記 が証明された。この時、この積分値の 0 整値性を証明するために Jack 多項式による表示を使うことになった。この部分は、Macdonald の本の第 6 章にある。Macdonald 多項式や Jack 多項式の内積公示と Selberg 型積分の関係が重要となった。これらのことを使って M における上記 を証明した。この時 M に現れる種々の作用素展開の性質は、Screening 作用素の

重複した積分によって定義される Virasoro まつわり作用素系 E, F の構成とその性質が重要となった。しかし、上記論文ではこの E, F と構成が非常に複雑な方法で定義したため、例えば、この E, F が合わせて有限次元単純リー環 $sl_2(C)$ を生成すること等、重要な部分が残されたままになっていた。

2015 年の上記論文の出版以来、私は橋本義武氏と松本拓也氏の協力を得て、上記部分の簡明化に努めてきた。

最年の終わり以降の結論は、次のようである。A1 型格子頂点作用素代数と 2 つの Screening 作用素 $Q_+(z)$, $Q_-(z)$ を付け加えることにより、A1 型の格子頂点作用素代数 V の拡大頂点作用素代数 V^\wedge を構成できる。このとき V^\wedge の中で $Q_+(z)$, $Q_-(z)$ は Super 演算子の役割を担っており、一種の超対称頂点作用素代数を生成する。この超対称頂点作用素代数 V^\wedge の表現のつくるアーベル圏は有限個の既約表現を持ち、しかもアーベル圏として半単純である。

この内容は、橋本氏、松本氏と 3 人の共著で論文を用意しつつあり、近々国際学会誌に投稿する予定である。この方法に基づいて M を解析することは簡単である。

上記のように理論が整備されたこととなり、理論を A1 型から A.D.E. 型の場合に展開することが当面の課題として目の前に出てきた。A.D.E. が rank 1 の場合には 21 個の Super charge が現れる。これらのことは、1990 年代に色々な研究によって試みられたことを一気に解決すると予想している。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

Akihiro Tsuchiya, Extended W algebra of $sl_{2|n}$ type at positive rational level and its representation, RIMS kokyuroku bessatsu B62(2017), 1-52, 査読あり

Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, On the extended W-algebra of type $sl_{2|n}$

at positive rational level, International Mathematical Research Notice, Vol.14(2015), 5357-5435, 査読あり, DOI: 10.1093/imrn/rnu090
Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, The tensor structure on the representation category of the W_p triplet algebra, Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 46(2013), 445203, 査読あり, DOI: 10.1088/1751-8113/46/44/445203

[学会発表] (計 1 件)

Akihiro Tsuchiya, Log 共形場理論と拡大 W 代数の表現論、日本数学会・秋期総合文代会・特別講演、2013 年 9 月 25 日、愛媛大学 (愛媛県松山市)

[図書] (計 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土屋 昭博 (AKHIRO TSUCHIYA)
東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・上級科学研究員
研究者番号：90022673

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者 ()

研究者番号：

(4)研究協力者 ()