

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 22 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400016

研究課題名(和文)代数体と函数体のガロア表現のモジュライの研究

研究課題名(英文)Study of the moduli of Galois representations of number fields and function fields

研究代表者

田口 雄一郎 (Taguchi, Yuichiro)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90231399

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：ガロア表現のモジュライ空間の構成やその性質について研究し、幾つかの基本的な成果を得た。また、これに関連して、ガロア表現についての幾つかの結果を得た。即ち、(1)かなり一般の完備離散附値体のガロア表現のガロア固定部分空間の消滅定理(今井の定理の一般化)とその岩澤理論への応用、(2)ガロア表現の合同に関する結果とその Rasmussen-玉川型の非存在定理への応用、(3)代数体の幾何学的なガロア表現のヘッケ体が、多くの(例えば或る場合には密度1の)有限素点について、そのフロベニウスの跡で生成される事の証明、(4)ガロア表現の像のザリスキー閉包の連結成分の個数の上からの評価、等を得た。

研究成果の概要(英文)：We have constructed a moduli scheme of Galois representations and studied its properties, and obtained some basic results. We have also obtained several related results, such as: (1) a vanishing theorem of the Galois-fixed subspace of a Galois representation of a rather general type of complete discrete valuation field (a generalization of a theorem of Imai) and its application to Iwasawa theory, (2) a result on the congruence of Galois representations and its application to non-existence theorems a la Rasmussen-Tamagawa, (3) proof of the fact that the Hecke field of a geometric Galois representation is often (say, with density 1 primes, in certain cases) generated by the trace of the Frobenius for a single finite prime, (4) an upper bound of the number of the connected components of the Zariski closure of the image of a Galois representation.

研究分野：数論

キーワード：ガロア表現 モジュライ 有限性 代数体 函数体

1. 研究開始当初の背景

本研究を開始した当初、既にガロア表現のモジュライ空間の構成についての大枠は出来ていたため、本研究ではその細部を詰める事と、関連する幾つかの個別の研究を遂行する事が懸案となっていた。個別の問題とは以下の様なものである。

岩澤理論に於ける定理ではしばしばガロア表現について或る仮定が置かれているが、それを比較的一般に証明する事が求められていた。

Rasmussen-Tamagawa 予想について、幾つかの研究結果が知られていたが、これをより多くの場合に拡張したり、ガロア表現の言葉で予想自体を一般化して証明したりする事が求められていた。

幾何学的ガロア表現のヘッケ体の性質、特に、「往々にして一つ(または少数の)フロベニウスの跡がこの体が生成される」という現象の理由の解明が求められていた。

2. 研究の目的

我々の研究の全体的な目的は、代数体及び函数体(有限体上の一変数代数函数体)のガロア表現を総合的に理解する事であり、特に本研究に於いてはこれをガロア表現のモジュライの観点から行った。ガロア表現のモジュライについてはこれまでの研究でも扱って来たが、それを発展させた。特に、Fontaine-Mazur の有限性予想の二つの版と Khare-Moon の有限性予想の間の関係を明らかにする事、及び、モジュライの有限性予想を解決する事、等が最大の目的であった。t-motive の arithmetic については、当初は t-motive についての

Ramussen-Tamagawa 予想の研究等を予定していたが、t-motive に限らず、ガロア表現の合同の問題として扱うのがより良いと判断し、まずは代数体のガロア表現の合同の研究を目的とする様に計画を変更した。

3. 研究の方法

ガロア表現のモジュライ関係は、基本的には研究代表者がほぼ単独で研究を行い、研究分担者や連携研究者と適宜討論を行い、知識を補充したり新しいアイデアを得る縁とした。

今井の定理の一般化とその岩澤理論への応用については、久保裕介氏と共同で研究した。研究代表者は主に今井の定理の一般化の証明を、久保氏は岩澤理論への応用を担当した。

ガロア表現の合同についての研究は小関祥康氏(当時京大数理研PD)と共同で行った。この研究は、研究代表者が数理研を訪問

し、また小関氏を九州大学に招聘して、研究打合せを行いつつ推進した。

ヘッケ体についての研究は、韓国・航空大学の崔度勲氏と共同で行った。この研究は、我々二人がソウルのK I A S に滞在して共同研究し、その後、崔氏を九州大学に招聘して行った。

ガロア表現の像のザリスキー閉包の連結成分については主に研究代表者が単独で行った。

どの研究についても、連携研究者とは有用な研究討論をする機会を持つ事が出来、間接的にはあるが、得られた研究成果に活かされている。

4. 研究成果

ガロア表現のモジュライの基礎理論については、論文を一応完成する事が出来、投稿し、最初の査読報告をもらい、現在改訂稿の査読をして頂いている所である。一番の懸案問題である「緩い条件下での」有限性の証明は、かなりの難問であると思われ、未だ手掛かりすら得られていない状態である(標準的な有限性の結果は得られている)。これまでに得られた主結果は次の通りである： R を f -profinite 環とし、正整数 n を固定する。このとき、(f -profinite 環の圏での) R の n 次表現全体をパラメトライズするモジュライスキーム X が f -profinite scheme として構成出来る。また、 R が有限型ならばこの X も有限型である。(残されている問題は、 R が有限型でなくとも、有限個の共役類で生成されるならば X は有限型か? という問題である。)さらに、このモジュライ理論の応用として、Fontaine-Mazur の有限性予想の (a)版と (b)版とが、Khare-Moon の有限性予想の仮定の下で同値になる事が証明出来た。

その他、 f -profinite 環の $\text{mod } p$ 表現の個数の母函数として定義されるゼータ函数についての性質や、Khare-Moon の予想の幾何学的定式化や、 f -profinite 環の表現のモジュライ理論の「版」も得られている。

久保裕介氏との共同研究により、今井の定理をかなり一般の完備離散附値体の場合に一般化した。即ち、完備離散附値体のガロア表現が或る緩い(自然な)条件を満たす時、そのガロア固定部分空間は自明となる。より詳しく述べると： K を混標数 $(0, p)$ の完備離散附値体で剰余体が本質的に有限型のものとする。 M を、 K に、 K の全ての 0 でない元の全ての p 冪乗根を添加して得られる拡大体とする。 G, H をそれぞれ K, M の絶対ガロア群とする。 X を K 上の smooth proper な代数多様体であって potentially good reduction を持つものとし、 i を正の奇数とする。 V を X (の基礎体を代数閉包ま

で拡大したもの)の有限アデル環係数の第 i エタールコホモロジー群とし、 T をその中の G -安定な格子とする。このとき V/T の H -固定部分 $(V/T)^H$ は有限である。

この結果は岩澤理論に应用がある。この結果の一部は後に J. Dimabayao 氏により高次コホモロジーの場合に一般化された。

小関祥康氏と共同で、ガロア表現の合同について研究した。これは特殊な等分点の様相を持つアーベル多様体の非存在についての Rasmussen-Tamagawa 予想にアプローチするための研究である。既に小関氏は半安定還元を持つアーベル多様体に対する同予想について結果を得ていたが、本研究ではアーベル多様体に限らず、一般のガロア表現であって或る素点で半安定であり、さらに幾つかの条件を満たすものについて、似た様な考察を行い、応用として、代数多様体の $\text{mod } \ell$ 係数エタールコホモロジーのガロア的性質や、楕円保型形式のフーリエ係数の合同に於ける「例外素数」についての結果を得た。

主定理の一つは次の通り：

K, E を有限次代数体とし、 G を K の絶対ガロア群とする。 u, v を K の有限素点、 a, b を E の有限素点、 e, b を正整数とする。 u と v の剰余標数はともに ℓ であり、 v の剰余標数は ℓ と異なるとする。 G_u, G_v によりそれぞれ u, v の分解群を表す。 $\text{Rep}(b)$ により、 G の n -次元 E -線型表現 V であって次の条件を満たすものの集合を表す：

- V は v で半安定、かつ E -整、
- V は K_u の或る有限次拡大であって絶対分岐指数が e を割るもの上半安定になり、
- V の u での Hodge-Tate 重みは $[0, b]$ 、
- V は (G) 型。

このとき、或る定数 $C = C([E:Q], n, b, e, |v|)$ が存在して次が成り立つ： 任意の素数 $\ell > C$ と任意の素点 u, v と任意の表現 $V \in \text{Rep}(b)$ 及び $V \in \text{Rep}(\ell - 2)/e$ に対し、もし G_u の表現としても G_v の表現としても $V \not\equiv \text{ss } V \pmod{\ell}$ ならば G_v の表現として $V \not\equiv \text{ss } V \pmod{\ell}$ である。ここで「 $V \not\equiv \text{ss } V \pmod{\ell}$ 」という記号は「両辺を $\text{mod } \ell$ したものの半単純化同士が同型」である事を意味する。

崔度勲氏と、幾何学的ガロア表現のヘッケ体についての共同研究を行った。この体は有限次代数体であり、各有限素点 p でのフロベニウスの跡 (トレース) $a(p)$ を含むが、逆にヘッケ体は全ての $a(p)$ 達で生成される事も知られている。しかし実際は、一つの p に対する $a(p)$ だけで生成される事も多い。このような方向の結果を数年前に Koo-Stein-Wiese が保型形式から来るヘッケ体について証明していたが、我々はより一般に、幾何学的なガロア表現に対してこのような結果を証明した。主結果は次の通り：

K を有限次代数体、 G をその絶対ガロア群、

E を有限次代数体、 ℓ を素数とし、 E_ℓ を E と ℓ 進数体との Q 上のテンソル積とする。 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ を G の幾何学的な E_ℓ -係数の有限次元表現とし、そのヘッケ体は丁度 E であるとする。不分岐有限素点 p でのフロベニウスの ρ による像の跡を $a(p)$ とする。簡単のため ρ の像のザリスキー閉包は連結であると仮定する。このとき、 $Q(a(p))=E$ となる不分岐有限素点 p の集合の密度は 1 である。

ザリスキー閉包が連結でないときも、より詳細な結果がある。また、跡でなく、特性多項式を使った版もある。以上は大域的なヘッケ体に関する結果であるが、局所的なヘッケ体に関する版もある。

この結果の応用として、総実代数体や CM 体上の一般線型群の保型表現の「有理性の体」とその局所版との関係について、同様の結果が示せる。即ち、 ρ はこのような大域的保型表現であって、対応するガロア表現が構成されている様なものとし、簡単のため ρ の像のザリスキー閉包は連結であると仮定する。 ρ の有理性の体を $Q(\rho)$ とし、 ρ の不分岐素点 p での局所成分を ρ_p 、その有理性の体を $Q(\rho_p)$ とする。このとき、 $Q(\rho) = Q(\rho_p)$ となる不分岐有限素点の集合の密度は 1 である。

ガロア表現の像のザリスキー閉包の連結成分の個数の評価は、或る種の幾何学的なガロア表現の個数の有限性を証明しようとする時等に有用になると思われる。本研究では、代数群の一般論を援用する事により、この種の結果を得る事が出来た。即ち、任意の正整数 n に対し或る定数 $J(n) > 0$ が存在し、標数 0 の任意の体 F と、 GL_n の F 上定義された任意の分裂簡約部分代数群 G に対し、その連結成分のなす群 G/G^{ss} は、指数 $J(n)$ なる正規アーベル部分群を有する。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 6 件)

[1] Dohoon Choi and Yuichiro Taguchi,
On the Hecke fields of Galois representations, to appear in:
Bulletin of the London Mathematical Society

[2] Yoshiyasu Ozeki and Yuichiro Taguchi,
On congruences of Galois representations

of number fields,
Publ. RIMS, 50 (2014), no. 2, 287--306
DOI 10.4171/PRIMS/134

[3] Shin Hattori,
Ramification theory and perfectoid spaces,
Compositio Mathematica 150 (2014),
798--834

[4] Shin Hattori,
On lower ramification subgroups and
canonical subgroups,
Algebra & Number Theory 8 (2014),
303--330

[5] Yusuke Kubo and Yuichiro Taguchi,
A generalization of a theorem of Imai and
its applications to Iwasawa theory,
Math. Z. 275 (2013), no. 3-4, 1181--1195
10.1007/s00209-013-1176-3

[6] Shin Hattori,
Canonical subgroups via Breuil-Kisin
modules,
Mathematische Zeitschrift 274 (2013),
933--953

〔学会発表〕(計 7件)

(1) 田口雄一郎
「ガロア表現の定義体について」
第134回日本数学会九州支部例会
2016年2月13日
九州大学 IMI オーディトリウム

(2) 田口雄一郎
「Galois 表現の Hecke 体について」
2015 大分整数論研究集会
2015年9月1日
ホルトホール大分 2階 サテライトキャンパス
おおいた講義室

(3) Yuichiro Taguchi
"On the moduli of Galois representations"
Number Theory Seminar
2015年8月5日
梨花女子大学校、ソウル

(4) Yuichiro Taguchi
"On the Hecke Fields of Galois
Representations"
Minisymposium "Class Groups and Zeta
Functions of Function Fields",
SIAM Conference on Applied Algebraic
Geometry (AG15),
2015年8月4日
NIMS, Daejeon, Korea

(5) 服部 新,
Abel 多様体の標準部分群と固有値多様体,

数論幾何学セミナー, 北海道大学, 2015年7
月24日--25日

(6) Shin Hattori,
Ramification of crystalline representations,
Classical and p-adic Hodge theories,
Rennes 大学, 2014年5月20--22日

(7) 田口雄一郎
「函数体に於ける周期について」
代数学シンポジウム、広島大学、
2013年8月29日

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)
取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.math.titech.ac.jp/~taguchi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者
田口 雄一郎 (TAGUCHI, Yuichiro)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 90231399

(2) 研究分担者
服部 新 (HATTORI, Shin)
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号: 10451436

(3) 連携研究者
栗原 将人 (KURIHARA, Masato)
慶應大学・理工学部・教授
研究者番号: 40211221

斎藤 毅 (SAITO, Takeshi)
東京大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号: 70201506

玉川 安騎男 (TAMAGAWA, Akio)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 00243105

安田 正大 (YASUDA, Seidai)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90346065

平之 内俊郎 (HIRANOUCHI, Toshiro)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 30532551