様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１８００１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００１８

研究課題名（和文）交代符号行列・平面分割の数え上げ組合せ論と行列式・パフィアンの研究

研究課題名（英文）Reserch on enumeration of alternating sign matrices, plane partitions and related determinants and Pfaffians

研究代表者
石川　雅雄（Ishikawa, Masao）

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：４０２４３３７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：ハンケル型のパフィアンとセルバーグ型の積分について Jiang Zeng 氏と共同研究を行った。また、Mehta-Wang　の行列式の拡張について、J. Zeng 氏、田川氏、 V. Guo 氏と共同研究を行い、Askey-Wilson 多項式を使った証明を得た。また,穴あきのアステカ長方形のドミノタイリングの個数について、ガウス超幾何級数の行列式を使って表す方法を研究した。ガウスの超幾何級数の隣接関係式と、それを応用して母関数を変形する方法を考察した。また、直交多項式と数え上げの行列式についても研究した。これらの研究成果は論文やいろいろな研究集会で公表した。

研究成果の概要（英文）：We studied Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinant and the Askey-Habsieger-Kadell q-Selberg's integral formula using de Bruijn's formula. We also obtained similar results for certain q-Pfaffian whose entries are moments of Al-Salam-Carlitz polynomials using a result by Baker and Forrester. We also studied a q-analogue of Mehta-Wang determinant and reduced it to a quadratic equation for the Askey-Wilson polynomials, which was a joint-work with V. Guo, H. Tagawa and J. Zeng. We also studied a combinatorial proof of a couple of Pfaffian identities with T. Eisenkoelbl and J. Kim. Recently I had some results on the enumeration of domino tilings of Aztec rectangle with holes. The enumeration problems are closely related to the combinatorial methods, e.g. the Gessel-Viennot Lattice path method, Kasteleyn's method and the enumeration of spanning trees of graph. In this research we obtain a determinant expression for the enumeration appealing to the Gessel-Viennot method.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：数え上げ組合せ論　表現論　数理物理　タイリング

１．研究開始当初の背景

交代符号行列式・平面分割の数え上げ問題は，組合せ論の数え上げ問題であったが，Schur 関数等の対称関数，Kuperberg の数理物理モデル，Pasquier や Di Francesco-Zinn-Justin 等の Affine Hecke Algebra の表現論や q-KZ 方程式との関連，そして最近では Fomin-Zelevinsky や Lam 等の cluster algebras との関連等の多方面から研究の題材を提供してきた．交代符号行列式・平面分割の数え上げ問題では，対称性を考慮した平面分割の組合せ論や Schur 関数等の対称関数との関係も深い．また行列式・パフィアンの評価については Gessel-Xin の論文 "The generating function of ternary trees and continuedfractions" (Electron. J. Combin. 13 (2006), #R53) 等の中でハンケル行列式や連分数との関係が明らかになった． ハンケル行列式は直交多項式と深い関係があり，私と田川裕之氏・Jiang Zeng 氏との 論文 Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants (*J. Combin. Theory Ser. A* **120** (2013), 1263-1284) では，ハンケル行列式に対応するパフィアンを提唱し，shifted reverse plane partition の重み付き数え上げの母関数を考察した．この論文の中で述べたほとんどの予想が Selberg 積分を使って証明されるが，Gessel-Xing 型の Hankel Pfaffian についてだけは，the associated Jacobi polynomials (Ismail-Masson, "Two families of orthogonal polynomials related to Jacobi polynomials", Rocky Mountain J. Math. 21）に関連した多変数直交多項式に関係していて未解決であった．この未解決な Pfaffian の計算と the associated Jacobi polynomials の関係を明らかにすることが目標であった．これと数え上げに現れる行列式・パフィアンの関係を明らかにすることも大きな目標であった．

２．研究の目的

交代符号行列（alternating sign matrices, 以下 ASM と略す）についての研究は例えば Mills-Robbins-Rumsey, ``Alternating sign matrices and descending plane partitions.'' (J. Combin. Th. Ser. A , 34 (1983), 340-359, などの一連の論文以来，数多くの研究者を魅了し続け，現在でも物理モデルや q-KZ 方程式，Cluster algebras 等の研究が進められている．また，関連した類似の数え上げ問題や refined enumeration の問題が残されている．Yang-Baxter-integrable system に対応し、またある種のハンケル行列式は，symmetry を考慮したいくつかの ASM のクラスの個数と知られ,そのもう１つの研究テーマは,名古屋大学の岡田氏の提唱した d-complete posets の (q,t)-hook formula の予想の証明である． d-complete posets は R. Proctor 氏によって 15 種類の既約な類に分類され,それらの既約な類の posets の slant-sum で書ける.今年の数理研の合宿型セミナーにおいて，Proctor 氏を招聘し，d-complete posets の hook formula についてレクチャーを行ってもらった．また，田川氏との共同研究で leaf posets の multi-variable hook formula を研究した．

岡田氏の (q,t)-hook formula については，普通の shape と shifted shape の場合には岡田氏が証明したが，Birds と呼ばれる既約な類の場合は，予想式の重み関数を Macdonald 多項式の Pieri 係数を使って記述し,証明するべき式を q-超幾何級数の等式に直して very-well-poised series に関する Gasper の公式を使って証明した．他の既約な類に対しても，同様に重み関数を Macdonald 多項式の Pieri 係数を使って記述できることが観察できるが，これらの等式の証明や洞察にも取り組むことも本研究の目的である．この他にも d-complete posets やその拡張である leaf posets の hook formula については Hilman-Grassl 対応の具体的記述や hook formula との関連など未解明なものが多く，この研究の中で取り組むことも多かった．したがって，本研究の目的は，交代符号行列，平面分割その他にタイリング・完全マッチング等の組合せ論や数理物理の可解モデルの数え上げ，それに伴って計算される母関数の行列式やパフィアンの計算，またそれに類似したハンケル行列やパフィアンと直交多項式や連分数，q-超幾何関数との間の関係を明らかにすることである．

３．研究の方法

研究組織としては，名古屋大学多元数理学科の岡田聡一氏を研究分担者に，和歌山大学の田川裕之氏を連携研究者に，Universite Claude Bernard の Jiang Zeng 氏を研究協力者（海外共同研究者）という体制で本研究を行う．これらの研究者とは，既にいくつかの共著論文があり，しばしば情報交換や共同研究を行っている．

交代符号行列や平面分割の数えあげに関しては，Gessel-Xin 等の論文で，その個数に等しい値を持つハンケル行列式が研究された．この行列式はパラメータが入っていないので，交代符号行列や平面分割の場合のパラメータに対応するパラメータを入れるという問題がある．また，この個数を証明するためには母関数は重要な道具である．

また，岡田氏による d-complete posets の $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{t})$-hook 公式の予想に関しても， Macdonald 多項式の Pieri 係数が重要な役割を果たすので，対称関数を駆使することは．この研究の中で重要な方法である．4Φ3 に関する Gasper の公式のような q-series に関する知識も必要になる.現在 Insets と Tailed Insets の場合を引き続き研究中であるが，予想を Pieri 係数を通じて $\boldsymbol{q}$-ser ies の等式に持っていくことは Macdonald 多項式の和公式に深く関係しているとも解釈でき，興味深い問題である．なぜなら，この (q,t)-hook formula の Shape と Shifted Shape の場合は Macdonald 多項式の和公式の Warnaar の拡張した式 (Warnaar , Rogers-Szego polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions, J. Algebra 303 (2006), 810-830) が必要だからである．これを Schur 多項式の場合に言い換えると Shape の場合が，まさに Cauchy の等式にあたり，Shifted Shape の場合が Littlewood の等式にあたる．Proctor 氏による d-compete posets の分類は 15 種類であり，この証明法は case by case で 15 種類について証明するものであるが，Shape と Shifted Shape 以外の場合の証明に使う q-series の等式と Macdonald 多項式の和公式の関係を研究することは，Macdonald 多項式への理解が深めると考えられ，興味深い．Universal な証明がある可能性があるが，slat 既約なそれぞれの poset の系に関する case by case の証明であっても，興味深い．さらに，leaf-posets についても Macdonald 多項式の考察から (q,t)-hook formula が得られればさらに面白いと思われる.その他にも最近の岡田氏の研究で (q,t)-hook formulae については,Hillman Grassl 対応に付随した別の重み関数が与えられることがわかった.この重み関数は Macdonald 多項式の Pieri 係数では記述されないので，Macdonald 多項式との関連は薄いと思われる.どちらの重み関数も同じ hook を与えるが,この新しい重み関数は Hillman Grassl 対応の具体的記述に依存している．Hillman Grassl 対応の具体的記述は Shape の場合には得られているが,それ以外の d-complete posets また leaf posets については知られていない．d-complete posets または leaf posets の Hillman Grassl 対応もまた解明しないといけないテーマである.また，私と田川氏との研究により leaf posets については，rank 関数や color 等が定義され,d-complete posets よりも広いクラスの posets について multivaribale hook formula が証明できることがわかった．

この点は，2012 年の RIMS 合宿セミナーで Proctor 氏と議論した際も，Proctor 氏が最も感銘を受けていた点である．しかし，これを (q,t)-hook formula にすると，d-complete poset でない leaf poset で，岡田氏の定義した重み関数では成り立たない例が作れる．leaf posets について $(q,t)$$-hook formula が成り立つ重み関数を定義することも解明すべきテーマである．

４．研究成果

ハンケル型のパフィアンとセルバーグ型の積分について Jiang Zeng 氏と共同研究を行った．ハンケル型のパフィアンを de Bruijn の公式を利用して，Selberg 積分の特別な場合に帰着できる．特に，Al-Salam-Carlitz 多項式のモーメントを成分にするハンケル型パフィアンを考察した場合には，T. H. Baker and P. J. Forrester の論文 Multivariable Al-Salam & Carlitz polynomials associated with the type A q-Dunkl kernel (Math. Nachr. 212 (2000), 5-35.) の結果を使って，以前に我々が作った予想を証明できることがわかった．これらの結果は，京都大学数理解析研究所やヨーロッパで開催される Seminaire Lotharingien de Combinatoire で発表したが，現在，論文を執筆中である．また，パフィアンではないが，Mehta-Wang の行列式の q-analogue を考案した．それはハンケル型ではなく，それが多少崩れた形であるが，単なる q-analogue でなく，さらに a,b,c,d というパラメータを入れることができる．さらに Wilson の biorthogonal polynomials を使い，Askey-Wilson 多項式の quadratic relation を使って証明された．これは Victor J. W. Guo, Jiang Zeng, 田川裕之氏との共同研究で ***Proc. Amer. Math. Soc.***に公表された．

また，パフィアンの Dodgson 公式の 1 変数化した公式を発見したと考えられたが，それが本来の Dodgson 公式に帰着されることがわかった．しかし，それは，Dodgson の公式の involution を使った証明ではあるので，現在，論文にまとめている．また，最近では，中野史彦氏、貞廣泰造氏、田川裕之氏と共にアステカ長方形に穴を開けた領域のドミノ・タイリングの個数について研究が進展している．もともと，交代符号行列のある種の条件をみたす組とアステカ正方形のドミノ・タイリングの間には高さ関数を使った全単射が存在して、ドミノ・タイリングの個数が２の冪になるということと，交代符号行列の２－数え上げ（交代符号行列の－１の個数を重みにした母関数に２を代入した値）には密接な関係があった。ところが、アステカ正方形に穴をあけた領域についても穴の場所の対称性が高い場合には，積公式が存在するという結果が M. Ciucu や C. Krattenthaler 等により研究されている．我々は，穴の位置をもう少し一般にして，ドミノ・タイリングの個数を数えることを考察した．正方形を長方形にすると，穴がない場合には，ドミノ・タイリングは存在しないが適当な個数の穴があればドミノ・タイリングが存在する可能性がある．この適当な個数の穴が一列の場合には，ドミノ・タイリングと Schroder 経路の組の間の全単射が作れられる．さらに，穴の個数が偶数個の場合には Gessel-Viennot の方法が適用できて，ドミノ・タイリングの個数が一般化された Schroder 数を成分とする行列式で書くことができることを発見した．この行列式の評価は決して易しい問題ではなく，さ

らなる研究を要するものであったが，アステカ正方形の場合に良く似た２の冪や綺麗な積とガウス超幾何を成分とする行列式の積で表されることを証明した．これらは，1列の穴がどの位置にあっても良く，穴の位置の関数としてより一般的なもので，我々は十分綺麗な形であると考えている．その他にも，2015 年 9 月に名古屋大学の岡田氏が「Pfaffian とその応用」について，集中講義を行った．その中で R. King 氏によるシューア多項式の Cauchy の等式や Littlewood の公式の restricted version についてのパフィアンを使った証明を紹介した．その講義に参加していた Sen-Pen Eu 氏と共に，その公式の involution を使った組合せ論的証明について共同研究を行った．それは，Robinson-Schensted-Knuth 対応や Jeu de taquin と深く関係していて，まだ未完成であるが，もし組合せ論的証明が完成したら興味深い．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　９件）

① Masao Ishikawa, Fumihiko Nakano, Taizo Sadahiro, Hiroyuki Tagawa, “Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes”, ***数理解析研究所講究録***, 査読無, (2016) 掲載予定.
② Victor J. W. Guo, Masao Ishikawa, Hiroyuki Tagawa and Jiang Zeng, “A quadratic formula for basic hypergeometric series related to Askey-Wilson polynomials”, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 査読有, **143** (2015), 2003-2015.
③ 石川 雅雄, 田川 裕之, “An extension of Wilson’s Gram determinants”, ***数理解析研究所講究録***, 査読無, **1945** (2015), 38-53.
④ Masao Ishikawa and Soichi Okada, “Identities for determinants and Pfaffians, and their applications”, ***Sugaku Expositions***, 査読有, **27** (2014), 85-116.
⑤ Masao Ishikawa and Jiang Zeng, Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants, ***Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.***, 査読有, **AT** (2014), 549-560.
⑥ Masao Ishikawa, (q,t)-hook formula for Birds, ***数理解析研究所講究録***, 査読無, **1913**, (2014), 47-66.
⑦ Masao Ishikawa and Hiroyuki Tagawa, Leaf posets and multivariate hook length property, ***数理解析研究所講究録***, 査読無, **1913**, (2014), 67-80.
⑧ Masao Ishikawa, Masahiko Ito and Soichi Okada, “A compound determinant identity for rectangular matrices and determinants of Schur functions”, ***Adv. in Appl. Math.***, 査読有, **51** (2013), 635-654.
⑨ Masao Ishikawa, Hiroyuki Tagawa and Jiang Zeng, “A generalization of Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials”, ***Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.***, 査読有, AS (2013), 719-730.

〔学会発表〕（計　９件）

① 石川雅雄，中野史彦，貞廣泰三，田川裕之，“穴あきアステカ長方形のドミノタイリングと超幾何級数”，RIMS 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」，2015 年 10 月 21 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．
② Masao Ishikawa, Fumihiko Nakano, Taizo Sadahiro and Hiroyuki Tagawa, “The domino tilings of Aztec rectangles with consecutive holes and the Gauss hypergeometric series”, NIMS 2015 Combinatorics Workshop, July 16, 2015, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea.
③ Masao Ishikawa, “(q, t)-hook formula for d-complete posets”, NIMS Seminar, July 3, 2015, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea.
④ Masao Ishikawa and Jiang Zeng, “Selberg Integrals and Evaluations of Hyperpfaffians”, RIMS 研究集会「組合せ論的表現論と表現論的組合せ論」，2014年10月31日，京都大学数理解析研究所，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．
⑤ Masao Ishikawa and Jiang Zeng, “Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants”, Le Seminaire de Theorie des Nombres et Combinatoire, September 17, 2014, Universite Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.
⑥ Masao Ishikawa and Jiang Zeng, “Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants”, The 73rd Seminaire Lotharingien de Combinatoire, September 8-10, 2014, Bundesinstitut fur Erwachsenenbildung, Strobl (Austria).
⑦ Masao Ishikawa and Jiang Zeng, “Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants”, The 19th International Linear Algebra Society Conference (Solidarity in Linear Algebra), August 6-9, 2014, Sungkyunkwan University (Seoul, Korea).
⑧ Victor J.W. Guo, Masao Ishikawa, Hiroyuki Tagawa, Jiang Zeng, “A genera

lization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials”, 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013), 2013 年 6 月 25 日, Paris(France).

⑨ Masao Ishikawa, “(q, t)-hook formula for Birds and Banners”, Infinite Analysis: Past, Present and Future, Bethe Ansatz, Quantum Groups and Beyond, March 4-9, 2013, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

〔図書〕（計　　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.okayama-u.ac.jp/~mi/

６．研究組織
(1)研究代表者
石川　雅雄（ISHIKAWA, Masao）
琉球大学・教育学部・教授
研究者番号：40243373

(2)研究分担者
岡田　聡一　（OKADA, Soichi）
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号： 20224016

(3)連携研究者
田川　裕之（TAGAWA, Hiroyuki）
和歌山大学・教育学部・教授
研究者番号：80283943