様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：３２５０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００２１

研究課題名（和文）概均質ベクトル空間のゼータ関数と保型超関数の関連

研究課題名（英文）Zeta functions of prehomogeneous vector spaces and automorphic distributions

研究代表者
杉山　和成（Sugiyama, Kazunari）

千葉工業大学・情報科学部・准教授

研究者番号：９０３７５３９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：保型超関数について研究を行った。関数等式をみたすL関数から保型超関数を構成する逆定理を証明し、ポアソン変換を利用して、L関数から合同部分群に関する実解析的保形式を構成する方法を確立した。さらに、上野隆彦氏が研究したある2変数概均質ゼータ関数が、この逆定理の仮定をみたすことを確かめた。これにより、2次合同式の解の個数を係数にもつマース形式を構成した。

研究成果の概要（英文）：We have studied automorphic distributions. We have proved a converse theorem by which one can construct automorphic distributions for congruence subgroups from L-functions with functional equations, and by using the Poisson transform, we have established a method to construct real analytic automorphic forms for congruence subgroups from L-functions. Moreover, we have confirmed that a certain prehomogeneous zeta function with 2 variables, which has been studied by Takahiko Ueno, satisfies the assumption of our converse theorem. This gives Maass forms whose coefficients are the number of the solutions of quadratic congruence equations.

研究分野：代数学

キーワード：概均質ベクトル空間　ゼータ関数　保型超関数　実解析的保型形式　国際研究者交流（フランス）

１．研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間とは、稠密な軌道をもつ（非常に大きな群の作用を受けている）ベクトル空間のことであるが、佐藤幹夫・新谷卓郎の理論（Ann. of Math. 100(1974)）により、概均質ベクトル空間の相対不変式を用いて関数等式をみたすゼータ関数が構成できる。概均質ベクトル空間やそのゼータ関数の例は豊富にあり、多くの研究がなされている。例えば、可換放物型概均質ベクトル空間は対称空間の境界と考えることができ、これらの空間に付随する概均質ゼータ関数は対称空間上の保型形式と関連があるものと予想されてきた。いくつも重要な課題はあるが、その中でも、逆定理（関数等式をみたすディリクレ級数と保型形式との対応）との関連は興味深い。実際、上野隆彦氏は２次形式と関連する概均質ゼータ関数に対してヴェイユの逆定理を適用し、任意のウェイト、レベルに対する正則保型形式を統一的に構成した（Nagoya Math. J. 175(2004)）。しかしその後、概均質ゼータ関数を用いた保型形式の構成についてはあまり研究されていない。

ところで、鈴木利明氏は、対称行列のなす概均質ベクトル空間上に、保型超関数とよばれるある種の保型性をみたす超関数を抽象的に定義し、そのフーリエ係数からL関数を構成し、概均質ベクトル空間の理論を利用してそのL関数の関数等式を証明した（Nagoya Math. J. 73(1979)。鈴木氏の結果は、佐藤文広氏と田村敬太氏により可換放物型概均質ベクトル空間に対して一般化された）。鈴木氏は保型超関数を用いて、実解析的ジーゲル・アイゼンシュタイン級数から構成されるケッヒャー・マース級数の関数等式を証明しているが、その証明を精査すると、鈴木氏のL関数の積分表示がジーゲル保型形式の「境界値」のメリン変換であると解釈できることが分かる。つまり、鈴木氏のL関数の積分表示に逆メリン変換を施したものは保型形式の「境界値」に相当している。また、表現論では、ポアソン変換を用いると、境界値から対称空間上の固有関数を復元できること（ヘルガソン予想）は良く知られており、これらを組み合わせれば、逆定理にあたるものが証明できるのではないかという期待が出てくる。以上が本研究を着想するに至った経緯である。

２．研究の目的

上述のアイディアは自然ではあるが、いざ実行してみようとすると「境界値」の取り扱いなど様々な技術的困難が伴う。そこで、最も簡単な SL(2,R)の場合を詳細に研究することを主たる目標とする。この研究からはマース波動形式（実解析的保型形式）に関する逆定理が導かれるが、それを精密化し、指標付きのディリクレ級数から合同部分群に関するマース波動形式を構成するという「ヴェイユ型の」逆定理を証明する。（ヴェイユによる逆定理の証明は正則関数に関するある性質を用いており、実解析的関数には適用できない。この困難により、合同部分群に対するマースの逆定理は未だに満足すべき形では証明されていない。）そして、我々の新しい逆定理を上野隆彦氏が定義したゼータ関数に適用し、マース波動形式の統一的構成を与える。このマース波動形式のフーリエ係数は、２次不定合同式の解の個数を用いて具体的に表示できるが、これはテータ級数が正則保型形式になるという定理の「実解析的保型形式版」あるいは「不定値類似」である。

３．研究の方法

逆定理の証明については、L関数、保型超関数、離散群の作用で不変な主系列表現の空間上の線形写像、および保型形式という４つの対象の間の対応をうまく組み合わせる。アイディアをもう少し具体的に説明してみよう。我々の議論においては、

(a) L関数と（鈴木氏の意味での）保型超関数との対応
(b)保型超関数と離散群Γの作用で不変な主系列表現上の線形写像との対応（文献によっては後者を保型超関数と呼んでいる）
(c) Γ不変な主系列表現上の線形写像と保型形式との対応

が重要になる。対応(a)は、メリン変換による。対応(b)は、主系列表現の非有界な実現を考え、Γ不変性をフーリエ展開可能性と対応させることにより分かる。対応(c)は、ポアソン変換による。これらの対応はある程度は知られているものの、十分に研究されていない部分がある。例えば、表現論の文献では主系列表現は群上の関数空間の上で実現し、ポアソン変換も群上の関数に対する変換として考えることが多いが、整数論では保型形式は上半平面上の関数として扱うことが多いので、それらの翻訳作業が必要になる。上述の対応をより精密にし、合同部分群に関するマース波動形式について考察する。対応(a)については、指標付きのL関数を考察し、対応(c)については、ウェイトが一般の場合を考察する。ウェイトが半整数の場合は、正則保型形式の場合と同様に被覆群についての考察が必要になる。以上の準備のもとで、(a),(b),(c)の対応を組み合わせて、合同部分群に関するマース波動形式についての逆定理を示す。さらに、上野隆彦氏により定義された2次形式に関連する概均質ゼータ関数は、この逆定理の仮定を満たすものと予想され、2 次合同式の解の個数を係数に持つ実解析的保型形式を構成できるものと思われる。

４．研究成果

上記で述べた計画に従って、実解析的保型形式に関する逆定理についての研究を行った。

(1) 対応(a)については、鈴木氏の L 関数の積分表示が概均質ベクトル空間のゼータ関数の積分表示と似ていることもあり、概均質ゼータ関数の理論が大変参考になった。逆メリン変換を使う手法もうまく機能し、対応(a)をかなり満足のいく形で確立できた。

(2) 対応(b)については、鈴木氏の保型超関数が、主系列表現空間上のΓ不変な線形汎関数になるかという問題がある。これについては、ヴェイユの逆定理の証明のときと同様に、指標付きのＬ関数を扱う必要がある。ただし、上述した通り、ヴェイユの証明には、正則関数特有の性質（正則関数の、楕円元の作用に関するある補題）が必要になり、そのままでは適用できない。そのため、ラザールの論文(Trans. AMS, 1977)の方法を取り入れた。この方法では、non-primitive な指標の場合も取り入れて、指標和付きのＬ関数を考えることになり、逆定理の仮定は見かけ上強いものになるが、後述する通り、この修正によって特に不都合が生じることはない。なお、ラザールの手法を取り入れるという点については、ディアマンティスとゴールドフェルドの論文(Amer. J. Math, 2011)を参考にした。

それから逆向きの対応、すなわち主系列表現空間上のΓ不変な線形汎関数から鈴木氏の意味での保型超関数が得られるか、という問題もある。これは大雑把にいえば、超関数のフーリエ展開ということになるのであるが、主系列表現の非有界実現として得られる関数は、一般には急減少な関数とはならない。そのため、通常の解析の教科書に載っているようなフーリエ展開の定理にはあてはまらず、この点については、別に考察が必要になった。一つの解決方法として、ポアソン変換の単射性を用いて実解析的保型形式のフーリエ変換を経由してそれを引き戻して超関数をフーリエ展開するという方法を考案した。ただし、主系列表現を定めるパラメータの値が generic でない場合には、ポアソン変換が単射にならず精緻な考察が必要になるが、その部分はまだ満足すべき結果が得られていない。

(3) 対応(c)はポアソン変換を通じて実現されるもので、比較的よく知られている。しかしながら、整数論への応用をするのに適した形でこの対応が書かれた文献は少ない。特に、半整数ウェイトの保型形式と被覆群上の主系列表現との関係を議論している文献がほとんどなかったため、いろいろと試行錯誤した。その中で、吉田敬之氏の論文(J. Math. Soc. Japan, 1992)と鈴木利明氏の論文(Nagoya Math. J., 1980)の結果を組み合わせると望む結果が得られるということが分かった。

以上の対応をつなぎ合わせて、逆定理を証明することができた。さらに、上野隆彦氏が研究した概均質ゼータ関数がこの逆定理の仮定をみたすことも確認できた。この際、先に述べた通り、指標和付きのＬ関数についての関数等式を証明することが必要になるが、ほとんどは上野氏が実行した計算と同様にできた。（しかも、指標和付きで L 関数を定義すると、示すべき関数等式の形が簡単になる。）ディアマンティスとゴールドフェルドは、前述の論文を発表した後、次の論文で、新谷卓郎氏が定義した２元２次形式から定義される２変数ゼータ関数が、本質的にウェイト 1/2, レベル４の実解析的アイゼンシュタイン級数のメリン変換であることを示している（J. Math. Soc. Japan, 2014）が、我々の結果においては、ウェイトやレベルは自由にとれる。

我々の証明は、これまで述べてきた通り、いくつものステップを積み重ねていくもので、論文を書き上げるのに苦労しており、残念ながら、研究期間内に論文を投稿することができなかった。しかしながら、京都大学、大阪大学、九州大学などで結果について発表し、国内外の研究者と情報交換を行った。また、連携研究者の佐藤文広氏は、今回の結果に関連する、概均質ゼータ関数と保型形式との関連についていくつかの国際研究集会で講演を行った。佐藤氏は 2014 年に立教大学で概均質ベクトル空間と表現論に関する日仏研究集会を主催されたが、その際、ナンシー大学のクレアー教授の旅費・滞在費を本研究費から拠出した。クレアー教授の講演を聞き、ベルンシュタイン-レジニコフによる積分と保型超関数が関連していることを学んだ。また、国際研究者交流の一助となることができ、有意義であった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Kazunari Sugiyama, Automorphic pairs of distributions and its application to explicit constructions of Maass forms, 数理解析研究所講究録 1934, 83-89, 2015, 査読無。

〔学会発表〕（計　7　件）

① 佐藤文広・杉山和成・上野隆彦、ある２変数概均質ゼータ関数から構成される実解析的保型形式,日本数学会 2016 年度年会、筑

波大学(茨城県つくば市)、2016 年 3 月 18 日。

② Kazunari Sugiyama, A converse theorem for automorphic distributions, 研究集会「Geometry, Representation Theory and Differential Equations」、九州大学伊都キャンパス(福岡県福岡市)、2016 年 2 月 17 日。

③ Kazunari Sugiyama、Maass forms arising from certain prehomogeneous zeta functions in two variables、研究集会「保型形式・保型的 L 関数とその周辺」、京都大学数理解析研究所（京都府京都市)、2016 年 2 月 4 日。

④ Fumihiro Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces, 国際研究集会「Zeta functions of several variables and applications」, 名古屋大学（愛知県名古屋市）,2015 年 11 月 13 日。

⑤ Fumihiro Sato, Automorphic pairs of distributions on prehomogeneous vector spaces and zeta functions, 国際研究集会「Prehomogeneous vector spaces and related topics」,立教大学（東京都豊島区）,2014 年 9 月 4 日。

⑥ 杉山和成、超関数の保型対と Maass 形式、大阪大学整数論＆保型形式セミナー、大阪大学（大阪府吹田市)、2014 年 6 月 20 日。

⑦ Kazunari Sugiyama、Automorphic pairs of distributions and its application to explicit constructions of Maass forms, 研究集会「保型形式と関連するゼータ関数の研究」、京都大学数理解析研究所（京都府京都市)、2014 年 1 月 22 日。

６．研究組織

(1)研究代表者

杉山 和成　(Kazunari Sugiyama)
千葉工業大学・情報科学部・准教授
研究者番号：90375395

(2)連携研究者

佐藤　文広（Fumihiro Sato）
立教大学・名誉教授
研究者番号：20120884