

令和元年5月29日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400023

研究課題名(和文) 数論多様体のp進コホモロジー

研究課題名(英文) p-adic cohomologies of arithmetic varieties

研究代表者

中島 幸喜 (NAKAJIMA, Yuki Yoshi)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：80287440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：数論的問題を幾何的手法を使って、問題を解明する数論幾何で現れる無限小コホモロジーという線型空間には豊かな構造があることを示した。具体的には円盤の類似である完備離散付値体上の固有な方程式の零点集合の無限小コホモロジーには極限重みフィルトレーションという標準的な部分空間の増大列があることを示し、その部分空間たちにはWeil-Deligne群というフロベニウスとモノドロミー作用素という二つの元で生成される良い群が作用することを示した。さらにこの作用は幾何的射から誘導される射と可換になることも示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有理数体や有限体や有理数体を素数 p によって決まる p 進距離で完備化した p 進体を係数とする代数方程式の零点で定義される幾何的対象である代数多様体には数論的手法で得られる様々なコホモロジーと呼ばれる線型空間がある。それらのコホモロジーを使って、元々の多様体の性質を調べる方法があるが、本研究は p 進体上の代数多様体の無限小コホモロジーと呼ばれるコホモロジーには極限重みフィルトレーションという意味深い構造があることを解明し、さらに基本的性質を調べた。

研究成果の概要(英文)：There is a theory which solves arithmetic problems by geometric methods. This is called theory of arithmetic geometry. In this theory, there is a notion of the infinitesimal cohomology. Concretely speaking, we show that there exists a well-defined increasing filtration on the infinitesimal cohomology, which we call the limit weight filtration. We also prove that the Weil-Deligne group (this is generated by a Frobenius and a monodromy operator) acts compatibly with the weight filtration. Moreover, we prove that this action commutes with the induced morphism on the infinitesimal cohomology by a morphism of geometry objects.

研究分野：数論幾何

キーワード：p進コホモロジー 無限小コホモロジー 重みフィルトレーション Weil-Deligne群 フロベニウス作用素 モノドロミー作用素 固有半安定多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

正標数の完全体上の多様体の剛性コホモロジーに対する p 進重みの理論を本研究者は 2012 年に Mem. Soc. Math. France から本 (264 ページ) として出版していた。そこでは剛性コホモロジーには与えられた多様体のみで決まる標準的な増大フィルトレーションが存在することを本研究者は示していた。 $(p$ 進重みフィルトレーションと言う。) このフィルトレーションの構成には与えられた多様体の超被覆と都築暢夫教授(東北大学)による固有降下の定理を使う。さらに加藤和也教授(Chicago 大学)による対数クリスタルコホモロジーの理論も使う。正標数の完全体が有限体の時はこのフィルトレーションはフロベニウスの固有値による数論的フィルトレーションと一致することを示していた。 p 進重みの理論において、 p 進重み系列が E_2 退化することや、幾何的射が剛性コホモロジーに誘導する射が p 進重みフィルトレーションと狭義両立する良い性質を示していた。

2. 研究の目的

研究の目的は大きく分けると、次の以下の 4 つの項目である。

- (1) 対数的点のファミリーの系列に体する遺伝的で単体的な固有安定型多様体の対数的クリスタルコホモロジーに体する p 進重み系列と p 進重みフィルトレーションの構成すること。
- (2) (1)で構成した p 進重み系列の E_2 退化と p 進重みフィルトレーションの収束性を示すこと。
- (3) 混標数離散付値体上の固有多様体の無限小コホモロジーに重みフィルトレーションを定義すること。

(4) 混標数離散付値体上の(固有とは限らない)有限型で分離的多様体の無限小コホモロジーにフロベニウス写像とモノドロミー作用素を定義すること。さらにこれらを使って、Weil-Deligne 群の作用を定義すること。

3. 研究の方法

研究の目的で述べた(1), (2), (3), (4)の方法はすべて違う方法なので、各項目ごとに研究の方法を述べる。

(1)の方法について述べる。各系列が一つの対数的点の場合は A. Mokrane 教授(パリ北大学)が対数的 de Rham-Witt 複体を使って、固有安定型多様体のクリスタルコホモロジーに対し、 p 進重み系列を構成していた。ただし、彼の構成は不完全なところや、間違っているところが多数あり、本研究者が 2005 年にそれらを全て正しく修正していた。本研究者の方法は系列が一つの対数的点のファミリーの非常に特殊な場合ですら、彼の結果の拡張であり、手法はクリスタル的手法を用いる最善の方法であり、応用範囲が広い。 p 進重み系列と p 進重みフィルトレーションの構成の証明は、組織的にフィルタード導来圏と複雑な良い埋め込み系を作り、(1)の理論の核となるフィルタード複体を構成することがポイントで、証明は相当長い。また、 p 進重み系列の構成には核となるフィルタード複体の階層化を計算する必要があるが、基本的には Poincaré の留数写像を使って、計算されるが、複体が PD-enveloppe の構造層付きの複体なので、階層化の計算には注意を要する。

(2)の方法について、述べる。A. Ogus 教授(UCLA 大)は、標数 p の固有で滑らかな多様体のファミリーのアイソクリスタルコホモロジーは収束性を持つことを先行結果として示していた。本研究者はこの結果を固有で対数的単純正規交差の多様体の場合の重みフィルトレーションに対し、拡張した。証明の方法は大雑把に述べると、A. Ogus 教授の方法を重みフィルトレーション付きフィルタード複体の階層化に対し、彼の結果を適用することによって、上記の拡張された結果を得る。

(3)の方法について述べる。(3)が本研究の主結果である。混標数離散付値体上の固有多様体は de Jong 教授の結果を使って、底変換すれば、固有半安定性的切除的単体的スキームの固有超被覆を持つ。よって、与えられた固有多様体の無限小コホモロジーはこの固有半安定性的切除的単体的スキームの無限小コホモロジーになる。この無限小コホモロジーはドラムコホモロジーになる。そこで、兵藤加藤同型を使って、このドラムコホモロジーは対数クリスタルコホモロジーに同型になることがわかる。ただし、本研究者は元々の兵藤加藤同型を修正して、混標数離散付値体の素元によらない兵藤加藤同型を構成したので、最後の同型はこの同型を使

う。結局、混標数離散付値体上の固有多様体無限小コホモロジーは(底変換すれば) 対数クリスタルコホモロジーに同型になることがわかる。そこで(1)で構成した重みフィルトレーションを無限小コホモロジーに移行できることがわかる。ただし、この重みフィルトレーションが固有半安定切除的単体的スキームの固有超被覆によらず、与えられた固有多様体のみよるかどうかは非自明である。この依存性がないことを示すには二つの固有半安定切除的単体的スキームの固有超被覆が与えられたとき、それらを覆う固有半安定切除的単体的スキームの固有超被覆が作れることと、後述の研究成果の(1)で述べる固有で対数的単純正規交差の多様体間の射がアイソクリスタルコホモロジーに誘導する射の強両立性により示すことができる。

(4)の方法について述べる。P. Berthelot 教授(Université de Renne I)と A. Ogus 教授はクリスタルの Weil 群が混標数離散付値体上の代数閉包上の固有で滑らかな多様体のアイソクリスタルコホモロジーに標準的に作用することを証明していた。さらにこの作用は混標数離散付値体上の代数閉包上の固有で滑らかな多様体間の射に関し、反変関手性を持つことも示していた。一方、A. Ogus 教授はモノドロミー作用素込みの対数的クリスタルの Weil 群を定義していた。本研究者は P. Berthelot 教授と A. Ogus 教授の上述の結果を拡張した。つまり、混標数離散付値体上の有限型で分離的な多様体の無限小コホモロジーに対数的クリスタルの Weil 群が標準的に作用することを証明した。この結果の証明の方法は(1)で使った対数クリスタル的手法である。これは Berthelot-Ogus 教授によるクリスタル的手法の対数版である。

4. 研究成果

以下に述べる研究成果は arxiv <http://arxiv.org/abs/1902.00182> に Limits of weight filtrations and limits of slope filtrations on infinitesimal cohomologies in mixed characteristics I. として既に公開している。

本研究では予定通り、研究の目的で述べた4つの項目をすべて示した。

(1) 対数的点のファミリーの系列に体する遺伝的で単体的な固有安定型多様体の対数的クリスタルコホモロジーに体する p 進重み系列と p 進重みフィルトレーションの構成をしており、先行結果よりも適用される多様体は比較にならないほど、広い。このフィルタード複体の単体的対数多様体の写像に関する反変関手性も示した。特にフロベニウス射の反変関手性は(3)の理論において、決定的な役割を果たす。つまり、対数クリスタルコホモロジーに誘導する単体的対数多様体の写像は p 進重みフィルトレーションと強両立することは(3)で定義する重みフィルトレーションがうまく定義されていることを示す際、決定的な役割を果たす。

(2) p 進重みフィルトレーションの収束性は非常に重要で、この結果を使うと、例えば、(1)で構成した重みスペクトル系列の E_2 退化が証明できたり、固有で対数的単純正規交差の多様体間の射がアイソクリスタルコホモロジーに誘導する射の強両立性を示したりすることができた。また、等標数 p の固有で対数的単純正規交差の多様体のファミリーのモノドロミー重み予想への応用もできた。さらに、(3)の結果にも応用される((3)で詳しく述べる)。 p 進重み系列の E_2 退化は最終的には Katz-Messing による有限体上の固有で滑らかなスキームのアイソクリスタルコホモロジーは pure weight であることに帰着させるが、この帰着のさせ方が難しく、研究の方法(2)で述べた A. Ogus によるアイソクリスタルコホモロジーの収束性を使って、証明する。

(3) (3)で定義した無限小コホモロジーの重みフィルトレーションに対し、混標数離散付値体上の固有多様体間の射が無限小コホモロジーに誘導する射が(3)で構成した重みフィルトレーションと強両立であることを示せた。

(4)の研究方法で述べた Weil-Deligne 群の作用は混標数離散付値体上の代数閉包上の有限型で分離的な多様体間の射に関し、反変関手性を持つことも示した。従来の兵藤加藤同型は素元の取り方に同型が依るので、この拡張した定理の証明は困難だったが、本研究者は素元の取り方に依らない標準兵藤加藤同型を構成したので、適切な枠組みが構成でき、de Jong の結果を使うことによって、自然な形で P. Berthelot 教授と A. Ogus 教授の結果を拡張した。この結果は混標数離散付値体上の固有対数的滑らかな多様体のドラムコホモロジーに対数的クリスタルの Weil 群が固有対数的滑らかな多様体の一般ファイバー間の射に関し、反変関手性を持つだろうという A. Ogus 教授の予想も大幅に拡張された形で解決した。さらに無限小コホモロジーへの Weil-Deligne 群の作用と l 進コホモロジーへの Weil-Deligne 群の作用は両立するであろうという予想の定式化に成功した。これは J. M. Fontaine 教授が予想した両立性予想の拡張になっている。

5. 主な発表論文等 なし。

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 5 件) 1. 2018 年 12 月 10 日, 中島幸喜, Artin-Mazur ' s height and Yobuko ' s height. Hakodate workshop on arithmetic geometry 2018, 函館 G スクエア

2. 2018年11月20日, 中島幸喜, 代数幾何学セミナー, Artin-Mazur height, Yobuko height and Hodge-Witt cohomologies. 東京大学大学院数理科学研究科理学部数学科・理学部数学科

3. 2018年2月20日, 中島幸喜, Log geometry, degenerations and related topics. Kobe Univ.

4. 2017年11月16日, 中島幸喜, Log deformation theory with Frobenius morphisms. p 進コホモロジーと数論幾何学 2, 東京電機大学

5. 2016年7月28日, 中島幸喜, Deformation invariance of log crystalline cohomologies with weight filtrations of SNCL schemes. p 進コホモロジーと数論幾何学, 東京電機大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。