

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400024

研究課題名(和文) ヤコビ形式を用いた多変数保型形式の研究

研究課題名(英文) Research on automorphic forms of several variables by using Jacobi forms

## 研究代表者

青木 宏樹 (Aoki, Hiroki)

東京理科大学・理工学部・准教授

研究者番号：10333189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、多変数の保型形式について、特にヤコビ形式を用いることにより、今まで以上の知見を得ようとするもある。本研究では、特に「多変数保型形式およびヤコビ形式におけるヘッケ作用素や跡公式の精密化」、「Borcherds型の無限積を使った多変数保型形式の構成法の一般化、特徴付け、および拡張」、「形式的なフーリエ・ヤコビ展開の収束性」の3つのテーマをメインに扱い、無限積表示を持つヤコビ形式の分類や、ジーゲルパラモジューラ形式のとりうる重さの限定などの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：This research project is to improve our knowledge of automorphic forms of several variables by using Jacobi forms. Mainly we treat 3 subjects "Refinement of Hecke operators and trace formulas", "New construction of automorphic forms by infinite products of Borcherds type" and "Convergence of formal series of Jacobi forms". Now we have some developments on each subject, for example, classification of Jacobi forms from infinite products, and, to give possible weights of nontrivial Siegel paramodular forms.

研究分野：保型形式

キーワード：整数論 保型形式 ヤコビ形式

1. 研究開始当初の背景

1変数の保型形式は、特にヘッケ固有形式のL関数が整数論の研究対象として非常に重要であるだけでなく、楕円曲線のモジュライの記述など幾何学の研究対象としても重要である。同様に、多変数の保型形式は、やはりL関数が整数論の研究対象として非常に重要であるだけでなく、K3曲面などの多様体のモジュライの記述など幾何学の研究対象としても重要である。一般的に、多変数の保型形式の研究は1変数の場合と比べてかなり困難であるが、最近になって(1990年頃から)、ヤコビ形式を用いることにより、多変数の保型形式を比較的簡単に扱えるケースが、次々と見つかってきた。

2. 研究の目的

前項で述べたように、多変数の保型形式は、整数論だけでなく幾何学などにおいても重要な研究対象である。一般的に、多変数の保型形式の研究は1変数の場合と比べてかなり困難であるが、ヤコビ形式を用いることにより、多変数の保型形式を比較的簡単に扱えるケースが、最近になって次々と見つかってきている。本研究は、多変数の保型形式について、特にヤコビ形式を用いることにより、今まで以上の知見を得ようとするものである。

3. 研究の方法

ヤコビ形式とは、大雑把に言えば、多変数の関数で、そのうちのいくつかの変数については保型形式の変換規則をみたし、残りの変数については2重周期性を持つものことであり、テータ関数やペー関数など、数論的あるいは幾何学的に重要な関数とその例となっている。それゆえ、ヤコビ形式を調べる手法は、一般の多変数の保型形式に比べれば、いろいろと知られている。そして、ヤコビ形式は、さまざまな多変数の保型形式に対して、そのフーリエ・ヤコビ展開の係数としてあらわれる。本研究は、多変数の保型形式について、そのフーリエ・ヤコビ展開を調べる(=そこにあらわれるヤコビ形式を調べる)ことにより、今まで以上の知見を得ようとしている。より具体的には、特に次の3つのテーマを設定した。

- (1) 「多変数保型形式およびヤコビ形式におけるヘッケ作用素や跡公式の精密化」
- (2) 「Borcherds 型の無限積を使った多変数保型形式の構成法の一般化、特徴付け、および拡張」

- (3) 「形式的なフーリエ・ヤコビ展開の収束性」

これら3つのテーマは、それぞれが未解決の課題であるばかりでなく、保型形式のリフティングというキーワードでお互いに結びついている。様々な領域と群において定義された保型形式たちは、もしそれらが良い関係にあれば、リフティングという操作によって対応をつけることができ、それはしばしば非自明な数学的事実をもたらす。そして、リフティングを具体的に記述して調べるには、ヤコビ形式を利用すると便利ことが多い。最初のテーマは保型形式のリフティングを考えるうえで基礎となるデータの精密な定式化であり、2番目のテーマはリフティングの具体的な構成を与える方法のひとつについて調べるものである。また、最後のテーマは、特に複素数体上で保型形式を考えるときにやっかいな問題となるリフティングの収束性についての研究である。

4. 研究成果

前項で述べた3つの研究テーマについて、それぞれ、以下のような成果を得た。

- (1) 「多変数保型形式およびヤコビ形式におけるヘッケ作用素や跡公式の精密化」

本テーマについては、研究協力者である坂田裕氏と共同で研究を行った。坂田裕氏による跡公式の計算によって、ヤコビ形式のレベルと指数の間には密接な関係があると予想されている。坂田氏は跡公式をより詳細に計算することによって、また青木はヘッケ作用素を用いてヤコビ形式の対応を明示的に構成することによって、この予想を解決しようとした。現時点では、それぞれ部分的な結果(レベルを限定した跡公式の計算、レベルと指数の変換写像の単射での構成)を得ている。論文については現在準備中であるが、海外研究者よりヴェイユ表現との関連性を述べるべきだとの指摘などがあり、まとまった形にするにはもう少々時間がかかりそうである。研究成果については、同濟大学(上海, 中国)における研究集会で発表するなどした。

- (2) 「Borcherds 型の無限積を使った多変数保型形式の構成法の一般化、特徴付け、および拡張」

本テーマについては、一定の進展があり、印刷媒体としては、今までの成果を、数理解析研究所講究録にまとめて公表した。ヤコビの三重積公式やワトソンの五重積公式は、ヤコビ形式における「無限積=無限和」の形をした等式であるとみなすことができる。青木は、より一般にBorcherds型の無限積表示を持つ

ヤコビ形式を考えた場合、最小変数ではこの2つの公式以外に類似の例はなく、多変数では他にも例があることを示した。ただし、多変数の場合については、すべての場合を調べつくすことはできておらず、その途中経過をいくつかの研究集会において報告したにとどまっている。

(3) 「形式的なフーリエ・ヤコビ展開の収束性」

このテーマは青木が2000年の論文で提唱したのが最初だと考えているが、最近になって他の研究者も取り組むようになり、M. Raum, J. Bruinier, C. Poor などによりいくつかの結果が発表された。青木も彼らとの議論には参加しており、いくつかの論文で、青木の結果が参照されるなどしている。青木本人は、主に分数(あるいは実数)重みの場合について詳細な研究を行い、さまざまな研究集会で、そのときどきの結果を発表した。特に、次数2のジーゲルパラモジュラー形式の場合には、非自明なモジュラー形式が存在することができる重みが極めて限られているという結果を得て、最近のいくつかの研究集会で報告を行っている。これらの結果をまとめた論文については、現在投稿中である。

なお、以下にまとめた研究成果については、これら3つの研究テーマのいずれかについて述べたものだけでなく、それらを含む総合的な研究報告なども含まれている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

(1) 査読あり論文 : 1件

① Hiroki Aoki,  
On Siegel paramodular forms of degree 2 with small levels,  
International Journal of Mathematics, 27-2.  
DOI: 10.1142/S0129167X16500117

(2) 査読ありプロシーディング等 : 1件

② Hiroki Aoki,  
On formal Series of Jacobi Forms and Borcherds Products,  
Automorphic Forms,  
Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (PROMS) 115 (2015), 1-10.

(3) その他 (査読なし) : 2件

③ Hiroki Aoki,  
On Jacobi forms which connect infinite products and infinite sums,  
有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究 (京都, 2014),  
数理解析研究所講究録 1965, 30-44.

④ Hiroki Aoki,  
Determination of the structure of vector valued Siegel modular forms by using Jacobi forms,  
2014 早稲田整数論研究集会報告集, 88-97.

[学会発表] (計14件)

(1) 海外での講演 : 7件

① Hiroki Aoki,  
A remark on the weights of Siegel modular forms,  
30th Automorphic Forms Workshop,  
Wake Forest University (Winston-Salem, NC, USA.), 2016年3月10日.

② Hiroki Aoki,  
A remark on the weights of modular forms,  
Seminar on automorphic forms in Mannheim University,  
Mannheim University (Mannheim, Germany), 2015年12月21日.

③ Hiroki Aoki,  
Estimation of the dimension of modular forms of several variables,  
Oberseminar Modulfunktionen,  
Heidelberg University (Heidelberg, Germany), 2014年8月21日.

④ Hiroki Aoki,  
On the structure of mixed weight Hilbert modular forms,  
Seminar on automorphic forms in Mannheim University,  
Mannheim University (Mannheim, Germany), 2014年8月19日.

⑤ Hiroki Aoki,  
On Jacobi forms of rational weight and rational index,  
28th Automorphic Forms Workshop,  
Moab Arts and Recreation Center (Moab, UT, USA.), 2014年5月15日.

⑥ Hiroki Aoki,  
Some Problems on Jacobi Forms,  
Seminar on automorphic forms in Tongji University,  
同濟大学 (上海, 中国), 2014年4月1日.

⑦ Hiroki Aoki,  
Jacobi forms of rational weight and  
rational index,  
Explicit Theory of Automorphic Forms,  
同済大学 (上海, 中国), 2014年3月25日.

(2) 国内での講演 (国際研究集会) : 5件

⑧ Hiroki Aoki,  
On Jacobi forms which connect infinite  
products and infinite sums,  
有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的  
組合せ論の研究,  
京都大学 (京都府京都市),  
2014年12月17日.

(注: 報告集あり、雑誌論文欄に記載)

⑨ Hiroki Aoki,  
Structure theorem of the space of  
automorphic forms of several variables,  
第17回整数論オータムワークショップ,  
白馬ハイマウントホテル (長野県白馬村),  
2014年11月6日.

⑩ Hiroki Aoki,  
Determination of the structure of vector  
valued Siegel modular forms by using  
Jacobi forms,  
2014 早稲田整数論研究集会,  
早稲田大学 (東京都新宿区),  
2014年3月12日.

(注: 報告集あり、雑誌論文欄に記載)

⑪ Hiroki Aoki,  
On Jacobi forms of fractional weight,  
The 7th China-Japan Conference on number  
theory,  
九州大学 (福岡県福岡市),  
2013年10月31日.

⑫ Hiroki Aoki,  
On Maass lift to Siegel paramodular forms,  
Workshop on Modular Forms and Jacobi  
Forms,  
上越教育大学 (新潟県上越市),  
2013年6月12日.

(3) 国内での講演 (日本人向け) : 2件

⑬ Hiroki Aoki,  
分数重み・分数指数のヤコビ形式について,  
香川セミナー,  
香川大学 (香川県高松市), 2015年7月11日.

⑭ Hiroki Aoki,  
「無限積=無限和」の等式を与えるヤコビ形  
式について,  
東北大学組合せ論セミナー,  
東北大学 (宮城県仙台市), 2015年3月17日.

[その他]

(1) 国際研究集会の開催 : 2件

① 青木宏樹, 林田秀一, 坂田裕  
第17回整数論オータムワークショップ,  
白馬ハイマウントホテル (長野県白馬村),  
2014年11月5日~9日.

② 青木宏樹, 林田秀一, 坂田裕  
第18回整数論オータムワークショップ,  
白馬ハイマウントホテル (長野県白馬村),  
2015年11月6日~10日.

(2) ホームページ等

RIDAI

(東京理科大学研究者情報データベース)

[https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/  
RIJIA01.php](https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php)

研究代表者のWebページ

(研究成果の紹介あり)

[http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/  
index.html](http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青木 宏樹 (Hiroki Aoki)  
東京理科大学・理工学部・准教授  
研究者番号 : 10333189

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

林田 秀一 (Hayashida Shuichi)  
上越教育大学・学校教育研究科・准教授  
研究者番号 : 80597766

(4) 研究協力者

坂田 裕 (Sakata Hiroshi)  
早稲田高等学院・教諭