

平成 29 年 5 月 16 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400026

研究課題名(和文)量子可積分系と多重ゼータ関数の研究

研究課題名(英文)Studies on quantum integrable systems and multiple zeta functions

研究代表者

小森 靖 (KOMORI, Yasushi)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：80343200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：量子ゲージ理論において最も基本的で重要な量である分配関数と、数論において非常に重要な役割を果たすゼータ関数が一致する例として Witten ゼータ関数があげられる。この関数は両分野において非常に大切な対象であり、様々な視点で調べる必要がある。この問題に関し、申請者は超平面配置に付随する格子和とその特殊値を記述する母関数を構成することによってそれらの値を統一的に扱うのみならず、Witten ゼータ関数の満たす関数関係式などを記述する方法を発見した。また関連する別種のゼータ関数や超幾何関数についてもそれらの性質を明らかにし、関数関係式や新たな公式などを発見した。

研究成果の概要(英文)：Both partition functions in quantum gauge theories and zeta-functions in mathematics, which play fundamental and important roles in each area, happen to coincide in some cases. Among them are the Witten zeta-functions. These zeta-functions are the main objects and should be studied from various viewpoints. For this problem, we proposed lattice sums associated with hyperplane arrangements and established a unified way to treat these values and functional relations among Witten zeta-functions via their generating functions. We also studied some properties of related zeta-functions and hypergeometric functions, and obtained new functional relations and formulas.

研究分野：数物系科学

キーワード：量子可積分系 多重ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

量子ゲージ理論において最も基本的で重要な量である分配関数を記述するために導入された Witten ゼータ関数について、これまで様々な研究がなされてきたが本質的な解明には程遠い状況にあった。申請者はこのような状況の中、Witten ゼータ関数の拡張として新たにルート系に付随する多変数多重ゼータ関数を導入し、Witten ゼータ関数の特殊値を与える母関数を構成することに成功した。これを契機に重要なクラスである Riemann ゼータ関数や Euler-Zagier 多重ゼータ関数、およびそれらの L 関数類似との関係が明らかになり、これまでの種々の結果を包含する結果をいくつも得ることができた。さらにルート系を軸として関連する別種のゼータ関数についてもいくつかの結果を導き出し、理論が急速に拡大、発展してきていた。

2. 研究の目的

本研究は、ルート系を中心に広がりを見せつつある様々な多重ゼータ関数を、表現論や数論、関数論、そして量子物理学等の分野を超えた枠組みで捉え、総合的に理解する理論の構築と解明を目標としている。具体的には以下の研究を行う。

- (1) 種々の多重ゼータ関数の総合的理解をするための理論の構築。
- (2) 量子ゲージ理論、及び量子多体系への応用。
- (3) 数論および Euler-Zagier 多重ゼータ関数論への応用、および p 進拡張。
- (4) 他の種類のルート系に付随するゼータ関数論への応用。

3. 研究の方法

- (1) 基礎理論の完成は最も重要な目標であるが、関連する研究の発展の進度が速いこと、また応用や関連分野の研究を進めていくことで全体として研究の広がりが見込めることから、応用研究も並行して行うこととする。
- (2) 関連分野については量子可積分系を中心に、表現論、数論、Euler-Zagier 多重ゼータ関数、他種のゼータ関数等への応用を目指す。その際様々な専門家と交流し、多角的に研究を行う。

4. 研究成果

- (1) 有限ルート系を原点を通る特殊な超平面配置と捉えることによって一般の超平面配置に付随する格子和を定義し、これらの特殊値に関する研究を行い、さらにルート系に付随する多重ゼータ関数の関数関係式を記述する母関数の

構成に着手した。それによれば、多重ゼータ関数の部分ルート系に付随する部分ワイル群の極小剰余代表元による軌道和が、ある種の多重ゼータ関数で表され、さらにこのゼータ関数はベルヌーイ数の拡張の級数として表すことができることが明らかとなった。特に一次元部分ルート系を考えれば、このゼータ関数はよく知られた古典的なレルヒゼータ関数で表され、その指数関数部分がルートから構成される基底の組み合わせによって計算できる。また一方、極小剰余代表元による軌道和が特殊値の導出の際、消えるかどうかは非常に重要な問題となる。消えた場合、恒等的に 0 になり新たな情報は得られない。この問題に対し、マクドナルドが導入したワイル群のポアンカレ多項式の一般化を導入し記述する方法を考案した。これを用いれば不変式論で現れるワイル群の次数(または指数)という非常に小さい情報によって判定できることがわかった。特に偶数と奇数が混ざった場合の特殊値を計算する際に必要なポアンカレ多項式に関して、これまで知られていなかった新たな恒等式を発見した。この考察を推し進めていく途中で、これまで知られていなかった偶数と奇数が混合した場合の特殊値が計算可能であることが分かったため、今後この現象に関する新たな研究が始まることとなった。

- (2) G_2 型ルート系に付随する多重ゼータ関数の正整数における特殊値の研究を行った。これまでの研究ではすべて偶数における値についてであったが、奇数を含む整数における値を関数関係式を構成することによって得ることができた。またこのような値が求められる仕組みについての説明を与えることができた。
- (3) p 進多重ポリログと p 進多重 L 関数の間に存在するある種の関係性についての研究を行った。古庄氏が導入した p 進多重ポリログと、松本氏と津村氏と共同で導入した p 進多重 L 関数はそれぞれ全く異なる動機によるものであるが、それらの間には簡単な関係式が存在することが明らかとなった。またその研究の過程で複素数体上の多重ゼータ関数に関して"正則化"を導入し、多重ゼータ関数たちの線形結合によって正則関数を構成できることを明らかにした。
- (4) p 進ユニタリエルミート行列空間における球関数のフーリエ変換について研究を行った。これまでの研究によって偶数次元の場合については解明できていたが、新たに奇数次元の場合について研究を進めた。偶数の場合と奇数の

場合は共通に記述できる点もあるが、多くの部分で奇数特有の現象もおこることが発見できた。

- (5) BC 型や C 型の楕円多重超幾何級数について新しい双対変換公式を得た。これらの特殊化によって V 級数の既知の結果を含む新たな変換公式や和公式を得ることができた。これらをまとめて論文として提出した。今後ヘッケ代数の楕円類似の作用や、三角関数型については直接の極限では得られないような変換公式について研究を進める必要が生じた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14 件)

- (1) H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Fundamentals of p adic multiple L functions and evaluation of their special values, *Selecta Math.*, (N.S.) 23 (2017), 39-100, 査読有.
- (2) H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of complex multiple zeta functions, *Amer. J. Math.*, Vol. 139, No. 1 (2017), 147-173, 査読有.
- (3) Y. Komori, Y. Masuda and M. Noumi, Duality transformation formulas for multiple elliptic hypergeometric series of type BC , *constr. approx.*, 44 (3) (2016), 483-516, 査読有.
- (4) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta functions of weight lattices of compact semisimple connected Lie groups, *Siauliai Math. Semin.*, 10 (18) (2015), 149-179, 査読有.
- (5) H. Ki, Y. Komori and M. Suzuki, On the zeros of Weng zeta functions for Chevalley groups, *Manuscripta Math.*, 104 (2015), 119-176, 査読有.
- (6) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Infinite series involving hyperbolic functions, *Lith. Math. J.*, 55 (2015), 102-118, 査読有.
- (7) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta functions associated with semisimple Lie algebras V , *Glasg. Math. J.*, 57 (2015), 107-130, 査読有.
- (8) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Lattice sums of hyperplane arrangements, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 63 (2014), 161-213, 査読有.
- (9) Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p adic unitary hermitian matrices II, the

case of odd size, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 63 (2014), 47-78, 査読有.

- (10) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta functions of root systems, *Funct. Approx. Comment. Math.*, 51 (2014), 43-46, 査読有.
- (11) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Hyperbolic sine analogues of Eisenstein series, generalized Hurwitz numbers, and q zeta functions, *Forum Math.*, 26 (2014), 1071-1115, 査読有.
- (12) Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p adic unitary hermitian matrices, *Int. J. Number Theory*, 10 (2014), 513-558, 査読有.
- (13) Y. Komori, Functional equations of Weng's zeta functions for $(G, P)/Q$, *Amer. J. math.*, Vol. 135, No. 4 (2013), 1019-1038, 査読有.
- (14) Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, *J. Ramanujan Math. Soc.*, Vol. 28, No. 1 (2013), 49-69, 査読有.

[学会発表](計 8 件)

- (1) 小森 靖, 荒川-金子ゼータ関数の $GL_2(\mathbb{C})$ 拡張とその関数関係式について, 関西多重ゼータ研究会, 2016 年 12 月 3 日, 大阪大学(大阪府豊中市)
- (2) Y. Komori, Zeta functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups, *Problems and Prospects in Analytic Number Theory*, 2016 年 10 月 31 日, 京都大学(京都府京都市).
- (3) 小森 靖, On Arakawa-Kaneko zeta functions associated with $GL_2(\mathbb{C})$ and their functional relations, 解析数論セミナー, 2016 年 6 月 17 日, 名古屋大学(愛知県名古屋市).
- (4) 小森 靖, 超平面配置の格子和とその応用, (関西多重ゼータ研究会, 2015 年 10 月 17 日, 立命館大学(滋賀県草津市)).
- (5) Y. Komori, Lattice sums of hyperplane arrangements and their applications, *French Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications*, 2015 年 9 月 7 日, St Etienne(France).
- (6) 小森 靖, 多重ゼータ関数の積分表示と非正整数点での漸近挙動, 解析数論セミナー, 2014 年 2 月 27 日, 名古屋大学(愛知県名古屋市).
- (7) 小森 靖, ルート系に付随する多重ゼータ関数について, 大岡山談話会, 2013 年 11 月 20 日, 東京工業大学(東京都

- 目黒区).
- (8) Y. Komori, Desingularization of complex multiple zeta functions and fundamentals of p adic multiple L functions I, RIMS 研究集会 2013 多重ゼータ値の諸相, 2013 年 7 月 24 日, 京都大学(京都府京都市).

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

小森 靖 (KOMORI, Yasushi)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号 : 80343200

(2) 連携研究者

松本 耕二 (MATSUMOTO, Kohji)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号 : 60192754

津村 博文 (TSUMURA, Hirofumi)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号 : 20310419