

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400027

研究課題名(和文) 不変体の有理性問題

研究課題名(英文) Rationality problem for fields of invariants

研究代表者

星 明考 (Hoshi, Akinari)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：50434262

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：ガロア逆問題の構成的研究を主眼とし、有限群の作用による不変体の有理性問題の研究を行った。有理性問題の研究に重要となる不分岐ブラウアー群という不変量を群の位数が奇素数 p の5乗の場合に完全に決定した。不分岐ブラウアー群を一般化した不分岐コホモロジー群についても、位数が奇素数 p の9乗の場合に非消滅性を示した。ネーター問題の研究、関連する作用による不変体の有理性問題の研究を行い、新たな知見をいくつも得た。

研究成果の概要(英文)：In view of constructive inverse Galois problem, we studied the rationality problem for fields of invariants under the action of finite groups. The invariant called the unramified Brauer group, which is important for the study of the rationality problem, was completely determined when the order of the group is the fifth power of odd prime p . Even for the unramified cohomology group which is a generalization of the unramified Brauer group, we showed that the non-vanishing of it when the order of the group is the ninth power of odd prime p . We studied Noether's problem and related rationality problems, and got several new results.

研究分野：数論、代数学、代数幾何学

キーワード：有理性問題 安定有理性 ネーター問題 レトラクト有理性 不分岐ブラウアー群 不分岐コホモロジー 双有理分類 半単項式作用

1. 研究開始当初の背景

代数方程式の解法は、古来からの数学における重要なテーマであり、E. Galois によって創始されたガロア理論は、現代代数学の土台を成し、数学の最先端における発展を支え続けている。特に近年は、理論的研究に加え、計算代数の発展によってガロア群の計算アルゴリズムが種々のソフトウェアに実装され、具体的応用が期待できる状況となっている。本研究の背景にある、ガロア逆問題は「任意の有限群 G が体 k の拡大 L/k のガロア群として出現するだろうか？」という自然な問いかけを指しており、有理数体上において未解決である。有理数体上の絶対ガロア群は、数論における最も興味深い対象の 1 つであり、同問題は「任意の有限群が絶対ガロア群の商群として出現するだろうか？」と言い換えられる。

2. 研究の目的

ガロア逆問題が、ガロア群が G となる体の拡大 (G 拡大) の「存在のみ」を問うているのに対し、本研究の目標は、その拡張として最終段階の課題である G 拡大全体の構造の把握、及びその具体的構成にある。したがって、一般には、(非可換) 類体論における類体の構成問題をも含む壮大なものである。その一つの代数的なアプローチとして、生成的多項式を用いた方法がある。体 k 上の G 拡大全体を、係数の変数の特殊化によってカバーする (有理関数体上の) 生成的多項式は、組 (G, k) によっては、その存在そのものが自明ではない (実際、 k が有理数体で G が位数が 8 以上の 2 冪の巡回群の場合には存在しない) もの、生成的多項式を具体的に構成し、生成的多項式に対する部分体 (同型) 問題「生成的多項式の異なる変数への特殊化は、いつ一方が他方の最小分解体の部分体 (と同じ体) を与えるか」に対する必要十分条件を与えることができれば、「 G 拡大全体の構造」を把握することができる。

3. 研究の方法

(1) 生成的多項式の構成法の 1 つとして、ネーター問題の肯定的解決がある。ネーター問題は、 n 変数有理関数体の G 正則作用による不変体 $k(G)$ に対し、「 $k(G)$ は有理的か？ すなわち、再び n 変数有理関数体と同型 (純超越的) か？」を問う問題である。同問題の肯定解によって、不変体の超越基底を用いて G 拡大を与える生成的多項式が構成される。ネーター問題は、代数幾何的に表現すれば、射影空間の有限群作用による商多様体は有理的か？を問うており、双有理分類の観点からも重要な問題である。Emmy Noether (1913) によって提唱された同問題は、有限可換群 G に対しては、Masuda, Swan, Endo, Miyata,

Voskresenskii 等の研究を経て、Lenstra (1974, Invent. Math.) によって、肯定解に対する必要十分条件が与えられた。しかし、非可換群に対しては、例えば冪零群や p 群の場合でさえも、ほとんどよく分かっていない。実際、位数 16 の一般四元数群に対する有理数体上の否定解が与えられたのは、2003 年のことである (J-P. Serre による)。M. Kang 氏 (国立台湾大)、B.E. Kunyavskii 氏 (Bar-Ilan 大)、北山秀隆氏 (和歌山大)、山崎愛一氏 (京都大) などとも協力しながら、ネーター問題の研究を行っていく。

(2) Saltman (1984, Invent. Math.) はネーター問題が代数閉体上否定解を持ちうる事を位数が p の 9 乗の p 群に対して示し、Bogomolov (1988) は p の 6 乗へ改善した。これらは、不分岐ブラウアー群が非自明であることを示すことで得られる。有理性の判定に重要となる、不分岐ブラウアー群の計算法を確立し、個々の場合に決定することを目指すさらには、不分岐ブラウアー群を一般化した不分岐コホモロジー群の計算法を樹立したい。

(3) ネーター問題を一般化し、体の拡大 K/k と G の整数表現に付随した乗法的作用である半単項式作用による不変体の有理性を検証する。この作用は、 G が K に自明に作用するときには、単項式作用、 K に忠実に作用するときには、トーラス作用と呼ばれる既存の概念と一致しており、後者の場合には、その不変体はガロア拡大 K/k で分裂する代数的トーラスの関数体となる。

4. 研究成果

(1) 位数が奇素数 p の 5 乗の有限群の作用による不変体の不分岐ブラウアー群を完全に決定した。これにより、この場合には同問題の解は、有限群の同質族によって決まることが明らかとなった。さらに一般に、同問題の解は同質族によって決まるのではないかという予想を提出した。この予想は、その後、Bogomolov 氏とBoehning 氏 (2013) によって肯定的に解決された。

(2) 有限群の有理関数体への半単項式作用による不変体の有理性問題の研究を行い、2 次元以下の場合、不変体が有理的であるための必要十分条件をノルム剰余記号 (ヒルベルト記号) で与え、埋め込み問題との対応を明らかにした。特に、非有理な場合、安定有理性、レトラクト有理性、単有理性のいずれも成り立たないことを示した。ガロア理論の埋め込み問題との関係についても明らかにした。また、5 次元以下の直可約表現に付随する不変体の有理性問題に応用した。別の論文では、3 次元純単項式作用の同問題を例外を除いて解決した。

(3) 二面体群についての relation module の研究を行い、relation module の直和分解の様子や直既約性を調べるとともに、不変体の

有理性問題に応用した。

(4) 3 次不分岐コホモロジーの研究を行い, Peyre 氏(2008)による先行結果, ある位数が p の 12 乗である有限群の作用による不変体に対する 3 次不分岐コホモロジーは非自明となる, という定理を位数が p の 9 乗の場合に改善した。この結果は, Colliot-Thelene 氏と Voisin 氏(2012, Duke Math. J.)による定理を通じて, 整数ホッジ予想の反例を具体的に与えることに対応する。

(5) 素数位数の巡回群に対する有理数体上のネーター問題の研究を行い, コンピューターを使って 20000 以下の素数に対し, いくつかの場合を除いて検証した。この結果は, 後に, Plans 氏(2017)による有理数体上の有限位数の巡回群に対するネーター問題の完全解決をもたらした。

(6) 位数 243 の群に対するネーター問題の研究を行い, 7 番目と 10 番目の同質族を除き, 対応する不変体の有理性を示した。これは, (1)の結果の精密化にあたる。

(7) 位数 128 の群に対する不変体の不分岐ブラウアー群の研究を行い, Moravec 氏(2012, Amer. J. Math.)による結果を精密化し, 不分岐ブラウアー群が非自明な場合に, 各不変体が安定双有理同値かどうかを調べ, 該当する 220 個の場合, 不変体は高々 3 種類しかないことを示した。また, それらの構造を, 商多様体の構造を通じて明らかにした。

(8) 代数的トーラスの有理性問題の研究を行い, 代数的トーラスの 4 次元と 5 次元の安定有理性問題を完全に解決した。さらに, レトラクト有理性の分類にも成功した。この結果は, Voskresenskii 氏(1967)による 2 次元の双有理分類, Kunyavskii 氏(1990)による 3 次元の双有理分類の高次元への拡張となっている。また, 証明の前段階として, 階数が 6 以下の G -lattice に対して, Krull-Schmidt(-Azumaya)の定理が成り立つための必要十分条件を与えた。さらに, その反例を, 置換 D_6 -lattice の相異なる直既約因子への直和分解として具体的に構成した。計算代数システム GAP を用いて flabby resolution を効率的に計算できるプログラムを作成し, 公開した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

1. 星明考, 山崎愛一, Rationality problem for algebraic tori, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 査読有, Vol. 248, No. 1176, 2017, 1-215.

DOI: 10.1090/memo/1176

2. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Degree three unramified cohomology groups, *Journal of Algebra*, 査読有, Vol. 458, 2016, 120-133.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.03.016

3. 星明考, Birational classification of fields of invariants for groups of order 128, *Journal of Algebra*, 査読有, Vol. 445, 2016, 394-432.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.05.035

4. Huah Chu, 星明考, Shou-Jen Hu, Ming-chang Kang, Noether's problem for groups of order 243, *Journal of Algebra*, 査読有, Vol. 442, 2015, 233-259.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.03.010

5. 星明考, On Noether's problem for cyclic groups of prime order, *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, 査読有, Vol. 91, No. 3, 2015, 39-44.

DOI: 10.3792/pjaa.91.39

6. 星明考, Rationality problem for quasi-monomial actions, *Algebraic number theory and related topics 2012*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, Vol. B51, 2014, 203-227.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

7. 星明考, Ming-chang Kang, 北山秀隆, Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems, *Journal of Algebra*, 査読有, Vol. 403, 2014, 363-400.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.01.019

8. 星明考, Ming-chang Kang, Boris E. Kunyavskii, Noether's problem and unramified Brauer groups, *Asian Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 17, No. 4, 2013, 689-714.

DOI: 10.4310/AJM.2013.v17.n4.a8

[学会発表](計 37 件)

1. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Multiplicative invariant fields of dimension $n \leq 6$, 日本数学会, 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京(東京都)

2. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Degree three unramified cohomology groups (II), 日本数学会, 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京(東京都)

3. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Relation modules of dihedral groups, 日本数学会, 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京(東京都)

4. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 第 15 回アフィン代数幾何学研究集会, 2017 年 3 月 5 日, 関西学院大学(大阪府)

5. 星明考, 不変体の有理性問題, 新潟代数セミナー, 2016 年 12 月 23 日, 新潟大学(新潟県)

6. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 代数的整数論とその周辺, 2016 年 11 月 29 日, 京都大学数理解析研究所(京都府)

7. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 等距離写像研究の多角的アプローチ, 2016年10月31日, 京都大学数理解析研究所(京都府)
8. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, Japan-Taiwan Joint conference on Number theory 2016, 2016年9月9日, 国家理論科学研究中心数学組(台北事務室), 国立台湾大学, 台北(台湾)
9. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 松江セミナー, 2016年7月26日, 島根大学(島根県)
10. 星明考, On the simplest cubic fields and related Thue equations, 松江セミナー, 2016年7月26日, 島根大学(島根県)
11. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 代数多様体の有理性と自己写像, 2016年7月21日, 京都大学数理解析研究所(京都府)
12. 星明考, 不変体の有理性問題, 愛知数論セミナー, 2016年7月16日, 愛知工業大学本山キャンパス(愛知県)
13. 星明考, On the simplest cubic fields and related Thue equations, 可換 Banach 環と関連分野研究集会 (第 90 回米沢数学セミナー), 2016年7月2日, 山形大学(山形県)
14. 星明考, Birational classification of fields of invariants for groups of order 128, Workshop on Galois point and related topics, 2016年6月3日, 新潟大学駅南キャンパスときめいと(新潟県)
15. 星明考, 不変体の有理性問題, 東京理科大学理工学部数学教室談話会, 2016年5月12日, 東京理科大学(東京都)
16. 星明考, 北山秀隆, Three-dimensional purely quasi-monomial actions, 日本数学会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県)
17. 星明考, On Noether's problem for cyclic groups of prime order, 日本数学会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県)
18. 星明考, 山崎愛一, Bravais group of dimension $n \leq 6$ and corresponding quadratic forms, 日本数学会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県)
19. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Degree three unramified cohomology groups, 日本数学会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県)
20. 星明考, On the simplest number fields and related Thue equations, 解析数論セミナー, 2015年12月17日, 名古屋大学(愛知県)
21. 星明考, Birational classification of fields of invariants for groups of order 128, 第 11 回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 2015年10月24日, 首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス(東京都)
22. 星明考, On Noether's problem for cyclic groups of prime order, 計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展, 2015年9月30日, 京都大学数理解析研究所(京都府)
23. 星明考, On the simplest number fields and related Thue equations, The 4th International Congress on Natural Sciences (ICNS2015), 2015年9月10日, 国立彰化師範大学, 彰化(台湾)
24. 星明考, On the simplest number fields and related Thue equations, 29th Journées Arithmétiques (JA2015), 2015年7月9日, デブレツェン大学, デブレツェン(ハンガリー)
25. 星明考, Rationality problem for algebraic tori, 可換 Banach 環と関連分野研究集会 (第 88 回米沢数学セミナー), 2015年6月27日, 山形大学(山形県)
26. 星明考, Birational classification of fields of invariants for groups of order 128, 日本数学会, 2015年3月23日, 明治大学(東京都)
27. 星明考, On the simplest cubic fields and related Thue equations, Joint Seminar and Research Camp (JSRC2015), 2015年3月4日, 新潟大学(新潟県)
28. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 射影多様体の幾何とその周辺 2014, 2014年11月3日, 高知大学(高知県)
29. 星明考, Birational classification of fields of invariants for groups of order 128, New Developments in Algebraic Geometry, 2014年9月5日, 国家理論科学研究中心数学組(台北事務室), 国立台湾大学, 台北(台湾)
30. 星明考, 山崎愛一, Rationality problem for algebraic tori, SEOUL ICM 2014, Short Communications, 2014年8月19日, Coex, ソウル(韓国)
31. 星明考, Rationality problem for fields of invariants, 可換 Banach 環と関連分野研究集会 (第 87 回米沢数学セミナー), 2014年6月28日, 山形大学(山形県)
32. 星明考, Ming-chang Kang, 山崎愛一, Class numbers and algebraic tori, 日本数学会, 2014年3月18日, 学習院大学(東京都)
33. 星明考, 不変体の有理性問題, Workshop on Galois point and related topics, 2013年9月14日, 山形大学(山形県)
34. 星明考, ネーター問題と不分岐ブラウア一群, 西早稲田数論セミナー, 2013年9月11日, 早稲田大学(東京都)
35. 星明考, Rationality problem for fields of invariants: a survey, One-day workshop of algebra, 2013年8月19日, 国家理論科学研究中心数学組(台北事務室), 国立台湾大学, 台北(台湾)
36. 星明考, M. Kang, B.E. Kunyavskii, Noether's problem and unramified Brauer groups, 代数幾何学セミナー, 2013年6月3日, 名古屋大学(愛知県)
37. 星明考, 山崎愛一, Krull-Schmidt

theorem fails for dimension 5 ,日本数学会 ,
2013 年 3 月 23 日 , 京都大学(京都府)

〔図書〕(計 2 件)

1. 星明考,日本評論社,群論序説,2016年,
271 ページ
2. 印南信宏,田中環,小島秀雄,星明考,
培風館,要点明解 線形数学 改訂版,2016年,
178 ページ

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)
取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

星 明考 (HOSHI, Akinari)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号 : 5 0 4 3 4 2 6 2