

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 23 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400028

研究課題名(和文)代数体の非アーベル制限分岐拡大の研究

研究課題名(英文)Non-abelian extensions of number fields with restricted ramification

研究代表者

尾崎 学(Ozaki, Manabu)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：80287961

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究によって得られた研究成果は概ね以下の3つである：1. Neukirch-Uchidaの定理の無限次代数体への一般化，2. 制限分岐岩澤加群による算術的同値性の判定条件，3. ある種の $Z_p$ -拡大体上の最大不分岐 $p$ -拡大のAbel性の判定条件。  
上記3つの研究成果はいずれも代数体の制限分岐拡大，言い換えれば絶対ガロワ群中の各素数に対する惰性部分群の入り方の深遠さの一端を反映しているものである。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we obtain the following results: 1. A generalization of the Neukirch-Uchida Theorem to number fields of infinite degree, 2. Criterion of arithmetically equivalence in terms of Iwasawa modules with restricted ramification, 3. Criterion for commutativity of maximal unramified  $p$ -extensions over  $Z_p$ -extension fields.

研究分野：数論

キーワード：Galois群 岩澤理論 制限分岐拡大 算術的同値

## 1. 研究開始当初の背景

本研究代表者は従来の研究に於いて、代数体の非アーベル制限分岐拡大を岩澤理論的な手法で研究する「非アーベル岩澤理論」を創始して展開し、様々な研究成果を得ている。Z<sub>p</sub>-拡大体上の最大不分岐アーベル p-拡大、あるいは最大 S-分岐アーベル p-拡大 (p は素数, S は素点の有限集合で S-分岐" は S に含まれない素点は不分岐の意) のガロワ群は岩澤加群と呼ばれ、これが古典的な岩澤理論の主たる研究対象であった。非アーベル岩澤理論に於いては、アーベル商のみならず最大不分岐、最大 S-分岐 p-拡大のガロワ群そのものの構造を目標とする。

申請者の非アーベル岩澤理論の研究は国内外の研究者にも影響を与え、申請者以外の研究者によっても研究成果が得られ、論文として発表されている (計 13 編)。

一方で、代数体の埋め込み問題の手法と岩澤理論的な手法を組み合わせることにより、任意の素数 p に対し、(i) 有限次代数体の最大不分岐 p-拡大のガロワ群として任意の有限 p-群が現れる、(ii) 代数体 (有限次とは限らない) の最大不分岐 p-拡大のガロワ群として任意の可算生成 pro-p-群が現れる、を示し、20 世紀初頭からの懸案を肯定的に解決した。これは絶対ガロワ群における各素点の分解部分群たちの含まれ方の分布のある種の一様性を表す結果と看做すこともできる。

以上述べたとおり、制限分岐拡大の研究は絶対ガロワ群中にどのように各素数に対する分解部分群が含まれているかという、数論における最も深淵な問題に直結している。この問題は現代数学の最重要問題の一つであり、現在多くの研究者によって盛んに研究されているものである。

## 2. 研究の目的

有限次代数体 k の最大 S-分岐 p-拡大の Galois 群 G(k,S) は、S が p 上の素点をすべて含む場合にはかなり深い理解が進んでいる。しかし、S が p 上の素点を含まない場合 (馴分岐) に知られている事実は然程多くない。その原因は、この場合の G(k,S) が非常に複雑な構造を持つ (少なくともそのように見岩澤理論に於いてはこの障害を克服するために、無限次代数体である k の円分 Z<sub>p</sub>-拡大 K 上で考える。G(K,S) は G(k,S) に比すれば群論的に単純であると考えらるので、まず G(K,S) を調べたのち、そこから G(k,S) の情報を引き出すのである。古典的岩澤理論では、この戦略がガロワ群の最大アーベル商に対して見事に実行された。実際 Wiles は G(K,S) の十分大きなアーベル p-進線形ガロワ表現を保型形式を用いて構成し、それによって岩澤予想が解決されるに至った。そこで本研究では、有限次代数体 k に対し、k

の Z<sub>p</sub>-拡大体 K のように G(K,S) の構造が単純になるような適度な無限次代数体 K 上で G(K,S) 自身、乃至はその大きな非アーベル商を研究する。そして G(K,S) の情報から、有限次代数体 k 上の G(k,S) の情報を引き出す。それによって有限次代数体上の制限分岐拡大の構造、そして絶対ガロワ群における分解部分群の入り方に関する新たな知見を得ることを目標とする。

## 3. 研究の方法

本研究を遂行するためには数論のみならず、pro-finite-群の理論、トポロジーなどの分野からも知見を導入して、広く横断的な研究を行う必要がある。従って、本研究と関連する数論分野の研究協力者との定期的な研究打ち合わせを行うことはもちろん、数論分野以外の研究者とも幅広く交流を図り、研究上有用な知見を得る必要がある。よって、適宜必要な分野の専門家と研究討論を行ったり、様々な研究集会に参加して研究情報を集める。それを基に研究協力者と研究打合せを行い、意見交換を行いながら研究を推進する。得られた研究成果は適宜、学術誌上、及び研究集会に於いて発表する。

## 4. 研究成果

(1) Neukirch-Uchida の定理の無限次代数体への一般化、

Neukirch-内田の定理は、有限次代数体の絶対 Galois 群の構造がその代数体の構造を決定づけるという主張である。その証明においては、絶対 Galois 群の群構造に各素点に対する分解部分群が "encode" されているという事実が鍵であり、当に絶対 Galois 群と素数との深遠な関係が体现されている定理と言える。無限次代数体 K の絶対 Galois 群 G\_K は、有限次代数体のそれと比べて持っている情報は少なくなるので、そこから容易に K を復元することはできないが、新たな手法を開発して証明に成功した。詳しい定理のステートメントは以下のとおりである：

C を有理数体 Q の Galois 拡大体の有限次拡大体で、任意の正整数 N に対して、 $p \equiv 1 \pmod{N}$  なるある素数 p がその次数 (超自然数として) を割り切らないようなもの全体の族とする。K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub> を C に含まれる代数体、を K<sub>1</sub> の絶対 Galois 群 G<sub>1</sub> から K<sub>2</sub> のそれ G<sub>2</sub> への位相同型とする。このとき、Q の絶対 Galois 群の元 で、 $(K_1) = (K_2)$ ,  $( ) = (-1)$  なるものが一意に存在する。特に K<sub>1</sub> と K<sub>2</sub> は同型である。

C はすべての有限次代数体と有限次代数体の円分的 Z<sub>p</sub>-拡大体を含むことを注意してお

く、この定理によって、絶対 Galois 群の開ではないある種の閉部分群たちにも十分豊富な情報が含まれていることが判った。そして、今後は如何なる閉部分群がどの程度の数論的情報を保有しているかという問題が重要になった。

## (2) 制限分岐岩澤加群による算術的同値性の判定条件

代数体と函数体の類似を追及して、小松-足立は以下の定理を与えた：

$k$  を有限次総実代数体、各素数  $p$  に対して  $K_p$  を  $k$  上  $1$  の  $p$  べき乗根全体で生成される体、 $M_p$  を  $K_p$  上の最大  $p$ -分岐アーベル  $p$ -拡大、 $X_p = \text{Gal}(M_p/K_p)$  を対応する岩澤加群とする。このとき、 $k$  のデデキントゼータ函数はすべての素数  $p$  に対する岩澤加群  $X_p$  の同型類から完全に特徴づけられる。

この定理の証明では岩澤主予想を使うため、総実代数体に対してしか適用されない。本研究では別の手法によって全く一般の有限次代数体に対しても主張が正しいことを証明することに成功した。

この定理により、代数体と函数体の類似性がより強固に成り立つことが確認された上に、今後代数体の冪零拡大の Galois 群と Dedekind ゼータ函数の関係を追及することの重要性が認識された。

## (3) ある種の $Z_p$ -拡大体上の最大不分岐 $p$ -拡大の Abel 性の判定条件

有限次代数体上の  $Z_p$ -拡大  $K/k$  がある種の条件を満たす場合に、 $K$  上の最大不分岐  $p$ -拡大  $L/K$  がアーベル拡大であるための必要十分条件を与えることに成功した、詳しい主張は次の通りである：

定理 条件 (i)  $K/k$  で分岐する素点はただ一つでそれが完全分岐している、(ii)  $K$  の最大不分岐アーベル  $p$ -拡大のガロワ群が  $Z_p$ -ねじれ群を持たない、(iii)  $k$  のイデアル類群の  $p$ -階数が  $\text{Gal}(L/K)$  のアーベル化の  $p$ -階数と一致する、が成立していると仮定する。このとき  $L/K$  がアーベル拡大であるための必要十分条件は  $k$  上の最大不分岐  $p$ -拡大  $l/k$  がアーベル拡大であることである。

$K$  のような無限次代数体上の最大不分岐  $p$ -拡大  $L/K$  がアーベル拡大であることを決定することは極めて困難であり、それを行う有限回で停止するようなアルゴリズムは知られていない。しかし、 $l/k$  がアーベル拡大かどうかは原理的には決定可能である。この定理によって、(i), (ii), (iii) を満たすような特別な  $Z_p$ -拡大  $K/k$  については、 $L/K$  がアーベル拡大かどうかを決定するアルゴリズムが存在することが判った。定理の条件

(i), (ii), (iii) を満たす  $Z_p$ -拡大の典型的な実例は、 $p$  が 8000000 以下の素数である場合の  $p$ -円分体上の円分的  $Z_p$ -拡大であり、この場合の  $L/K$  のアーベル性の判定条件は既に Sharifi によって与えられている。彼の手法の本質的ステップの一つは問題を  $l/k$  のアーベル性の決定問題に帰着させる部分である。Sharifi の方法は円分体の理論に依存しているが、本研究によってこのステップがかなり一般の  $Z_p$ -拡大についても実行可能であることが明らかになった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

T. Fukuda, K. Komatsu, M. Ozaki, T. Tsuji: On the Iwasawa  $\lambda$ -invariant of the cyclotomic  $Z_2$ -extension of  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  III, *Funct. Approx. Comment. Math.* 54 (2016) 7—17. (査読有)

[学会発表](計 5 件)

尾崎学, 無限次代数体に対する Neukirch-内田の定理, 早稲田大学整数論研究集会, 早稲田大学 (2015 年 3 月 19 日)

尾崎学, 代数体の付随するガロワ群による特徴付けについて, 代数学シンポジウム, 東京大学数理科学研究科 (2014 年 9 月 8 日)

尾崎学, The Neukirch-Uchida theorem for a certain class of number fields of infinite degree, 早稲田大学整数論研究集会, 早稲田大学 (2014 年 3 月 10 日)

尾崎学, On the Neukirch-Uchida theorem for certain number fields of infinite degree,

Asterier pro- $p$  groupes et arithmetique, Universite de Franche-Comte (France) (2013 年 12 月 16 日)

尾崎学, 無限次代数体に対する Neukirch-内田の定理について, 北陸数論セミナー, 金沢大学 (2013 年 11 月 28 日)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

## 6. 研究組織

(1)研究代表者

尾崎学 (OZAKI, Manabu)(早稲田大学 理工  
学院 教授)

研究者番号：80287961

(2)研究協力者

水沢靖(MIZUSAWA, Yasushi)(名古屋工業大学  
准教授),

藤井俊(FUJII, Satoshi)(金沢工業大学, 講  
師),

伊藤剛司(ITO, Tsuyoshi)(千葉工業大学,  
准教授),

岡野恵司(OKANO, Keiji)(都留文科大学, 講  
師),

東海林満(TOHKAIRIN, Mitsuru)(大阪体育大  
学 非常勤講師)

C. Maire (Franche-Comte 大学, 教授)

A. Movahhedi (Limoges 大学, 教授)

B. Angles 氏(Caen 大学, 教授)