様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００３９

研究課題名（和文）ケースリー曲面上の自己同型に関する研究の曲線論への応用

研究課題名（英文）Applications of researches on automorhisms group of K3 surfaces to the curve theory

研究代表者
渡邉　健太（Watanabe, Kenta）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・研究員

研究者番号：７０５８２６８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において代表者は Nikurin による K3 曲面上の反シンプレクティックな対合の固定点集合の具体的記述を用いて K3 曲面に含まれる曲線のクリフォード指数を計算する直線束の具体的記述及び、分類を与えた。また、平面曲線の二重被覆が K3 曲面に乗るための条件を平面曲線の二重被覆の分岐点における Weierstrass 半群を用いて特徴づけた。更に、研究期間の後半において代表者は正則曲面上の曲線の Brill-Noether 理論の観点から K3 曲面上の分解しない安定ベクトル束の興味深い例を構成した.

研究成果の概要（英文）：In our research, we gave a concrete description and a classification of line bundles on a curve on a K3 surface which compute the Clifford index of it, by using Nikulin's concrete description of the set of fixed points of a non-symplectic involution on a K3 surface. On the other hand, we have characterized a sufficient condition for a double covering of a plane curve to be contained by a K3 surface, by using the computation of Weierstrass semigroups of ramification points on it. Moreover, later in the period, we have constructed an interesting example of an indecomposable stable vector bundle on a K3 surface in the point of view of the Brill-Noether theory of curves on regular surfaces.

研究分野： 代数幾何学

キーワード： K3 曲面　代数曲線　Weierstrass 半群　Lazarsfeld-Mukai 束　ACM 束

１．研究開始当初の背景

背景その１完備非特異曲線の研究において、その上の有理型関数の存在性を介しての曲線の分類問題に関する研究は古来より行われてきた。非特異曲線 C に対して r,d を自然数とするとき、W_d^r(C) で C 上の次数 d, 次元 r の因子（線形系）全体の成すヤコビ多様体内の像をを表す，これは Brill-Noether 軌道と呼ばれ、その構造を解明することは標準曲線の syzygy に関する Green 予想や代数曲線上のベクトル束のクリフォード指数に関する Mercat 予想等を中心に代数曲線の分類問題において重要な役割を果たしてきた．特に Green 予想が成立するための十分条件として曲線の種数とゴナリティによる Brill-Noether 軌道の次元についての評価式が Aprodu により得られている．また、Voisin による一般の曲線に対する Green 予想の解決は記憶に新しい．最近ではこのことを踏まえて特に正則曲面上の曲線の Brill-Noether 軌道の次元を評価する研究が盛んに行われてきた.

曲面上の曲線に対する Brill-Noether 理論においてはしばしば曲線上の線形系がいつ ambient space へ伸びるかという問題が考えられる．特に K3 曲面上の曲線に対してはクリフォード指数が線形同値で不変である（つまり、直線束に対してクリフォード指数が決まる）こと及び、ある数値的条件の元で K3 曲面上の直線束 L のクリフォード指数は K3 曲面のある因子 D の |L| に属する滑らかな曲線への制限によって計算される事がグリーン・ラザースフェルド等により知られている．更に、ジェンセン・クヌンツェンは直線束 L のクリフォード指数を計算するその様な因子 D は基点を持たず、|D| の一般メンバーは滑らかな曲線になるように選べる事を示している．これらの結果を踏まえ、これまで K3 曲面やデルペッゾ曲面を中心とする正則曲面上の曲線のクリフォード指数を計算する直線束を ambient space の因子を用いて特徴づける研究が進められてきた.

一方、当初 K3 曲面上の曲線に対する Brill-Noether 理論についての研究とは別に、K３ 曲面上の自己同型をその固定点集合を用いて分類する研究が瀧・大橋らにより行われていた．彼らは与えられた K3 曲面のピカール格子に自明に作用する自己同型の分類を行っていたが、代表者は彼らの研究の元となったニクリンによる反シンプレクティックな対合の固定曲線の具体的記述が K3 曲面上の非特異曲線のクリフォード指数を与える直線束の分類に応用できないかと考えた．そして、特に 2-elementary 格子をネロン・セベリ格子にもつ K3 曲面上の豊富な線形系の中で曲線のゴナリティ一が一定になるための必要十分条件を ambient space である K3 曲面のピカール格子の階数と discriminant を用いて特徴づけることに成功していた.

背景その２一般に種数 g の曲線 C とその上の点 p に対し、p で n 位の極を持ち、p 以外では正則な C 上の関数が存在しない時、n を p での gap と呼ぶ。このとき、p の gap の集合 G(P) の個数は g であり、C 上の有限個の点を除いて G(P)={1,2,・・・,g} となることが知られている。これらの点を通常点と呼び、そうでない点をワイヤストラス点と呼ぶ。一般に曲線上の点がいつワイヤストラス点になるかを調べるのは困難であるが、ワイヤストラス点は等角不変量であることから近年自己等角写像との関連性が重要視されており、これまで曲線上の自己同型による固定点とワイヤストラス点の関係を調べる研究が盛んに行われてきた。ところが、これまでは平面曲線や有理曲面上の自己同型で安定な非特異曲線及び、固定点からなる点付き曲線を考えるのが主流であり、その他のケースについては殆ど言及される事がなかった。

２．研究の目的

第一に曲線 C が K3 曲面上の曲線である場合に C のゴナリティーやクリフォード指数に関係の深い W_d^1(C) の構造を明らかにすることである．r=1 の場合は主な研究としてマルテンスやコッペンスらの研究が知られており、比較的低いクリフォード指数の曲線の場合には W_d^1(C) (d は C のゴナリティー)の分類は済んでいる.しかし、一般には曲線のクリフォード指数を計算する直線束がどの様なものかよく分かっていない為、その構造は知られていない。本研究では前述のグリーン・ラザースフェルドやニクリンらの結果を用いて K3 曲面上の曲線のクリフォード指数を計算する直線束の分類を行うことが目的であった.

第二に 前述のニクリンの結果を踏まえ、K３ 曲面上の反シンプレクティックな対合から誘導される完備非特異曲線の二重被覆の分岐点とワイヤストラス点の関係を調べることである．ワイヤストラス点に関して、与えられた完備非特異曲線上の有限位数の自己同型から誘導される巡回被覆の分岐点がいつワイヤストラス点になるかという問題は今も難問として残っている。特に超楕円曲線における二重被覆の場合、分岐点とワイヤストラス点の概念は同値であることから一般にワイヤストラス点は二重被覆写像の分岐点の拡張とも言え、両者の関係を調べる研究が注目を浴びている。その為、近年二重被覆型の算術的半群（i.e., ある曲線の二重被覆の分岐点における半群）

の特徴付けに関する研究が盛んに行われており、特にその様な算術的半群を持つ点付き曲線が K3 曲面上でいつ構成できるかという問題は曲線と K3 曲面双方の専門家の間で関心がある。古典的な結果として、マイルスリードによる K3 曲面上の曲線のゴナリティーの種数による評価から、曲線 C に対しその二重被覆 C^が K3 曲面に乗る為の必要条件として C と C^ の種数に関する評価式が知られているが、それ以上の事は殆ど分かっていない。これらの事から本研究では前述のニクリンの結果や向井氏による K3 曲面上の有限シンプレクティック自己同型の分類などを用いて主に K3 曲面上の対合に対して安定な曲線上の固定点とワイヤストラス点の関係を明らかにすることを目的とした.

３．研究の方法

研究の方法その１ K3 曲面 X 上の曲線 C はその種数がゴナリティーに比べて十分大きい時、C のゴナリティーペンシルが ambient space X のある楕円ペンシルの C への制限で与えられるという古典的な結果がマイルスリードにより知られている。これにより、C から決まる直線束 L=O_X(C) のクリフォード指数を計算する直線束の分類には、C の種数がゴナリティーに比べて十分小さい場合に L のクリフォード指数が ambient space のある楕円ペンシルの C への制限によって計算されるか否かが本質的に大きなポイントとなる。特に、ネロン・セベリ格子が 2-elementary 格子である様な K3 曲面はピカール数 2 以上で楕円 K3 曲面の構造を持つ為、これらの事をその様な K3 曲面上の非特異曲線について調べる事は意義があり、興味深い.

直線束 L のクリフォード指数が X 上の楕円曲線の制限によって計算される為には L の決める線形系 |L| に含まれるすべての滑らかな曲線のクリフォード次元は１でなければならない。そこで当面はそのような曲線の分類から始めた. ネロン・セベリ格子が 2-elementary である K3 曲面はネロン・セベリ格子に自明に作用する反シンプレクティックな対合θを持ち、そのような対合で移りあう 2 曲線は線形同値である. 特に代表者はθの固定点集合 X^θが種数 2 以上の既約曲線の場合、自己交点数が0 である任意の有効因子は X^θとの交点数が丁度 4 になるとき、またその時に限って楕円曲線になることを用いて楕円ペンシルの分類を行った. しかしながら、この方法では ambient space のピカール格子の階数が大きいとき、例外曲線（クリフォード次元 2 以上の曲線）の特定が難しく、実際に行うことができたのは K3 曲面がデルペッゾ曲面の二重被覆として得られるごく一部の場合に過ぎなかった.

研究の方法その２ 本研究は神奈川工科大学の米田氏との共同研究である. 一般に算術的半群 H に対して、d_2(H)={ h/2 | H の元 h は偶数} と定義するとき、(C,P) と P を分岐点の一つに持つ二重被覆 (C^,P^) のワイヤストラス半群の間には d_2(H(P^))=H(P) なる関係がある事が知られている。しかし、H(P) がシンメトリックでない場合は H(P^) の構造は複雑でよく知られていない。又、点付き曲線 (C,P) のワイヤストラス半群 H(P) に対して、d_2(H^)=H(P) を満たす算術的半群 H^ をワイヤストラス半群に持つ点付き曲線が存在するかどうかは長い間難問とされてきた。ある点付き曲線の二重被覆に対応するこの様な算術的半群 H^ は二重被覆型と呼ばれる。一般に与えられた二重被覆の branch point における半群が分かっていても、ramification point における半群の候補はたくさんあるので、与えられた算術的半群に対してこの問題を考えるのは困難である。そこで本研究では特に (C,P) が平面曲線とその上のワイヤストラス点からなる場合に d_2(H^)=H(P) となる H^ をワイヤストラス半群に持つ点付き曲線 (C^,P^) ((C,P) の二重被覆になる) が射影平面の 6 次曲線で分岐する二重被覆の上で構成できる為の (C,P) と H^ に関する条件を調べることを目標に研究を行った. この際、主に射影平面の二重被覆 π：X→P^2 として得られる K3 曲面 X とその被覆変換の対合で安定な非特異曲線 C^ に対し、π が C^ へ誘導する二重被覆 π：C^→C の ramification point P^ におけるワイヤストラス半群をまず調べた. この時、P^ における半群 H(P^) は二重被覆型の算術的半群なので偶数の non-gap は branch point P=π(P^) における半群により自然に決まることから、主に奇数の non-gap を決定した. 平面曲線上のワイヤストラス半群の研究については米田・キム等による比較的低い種数の点付き曲線のワイヤストラス半群の分類結果が知られているが、射影平面上の点付き曲線 (C,P) に対し、P における接線 T_P と C の局所交点数 I_P(T_P∩C)<deg(C)-2 の場合は H(P) の候補は沢山あり困難であった. 従って、まず I_P(T_P∩C)=deg(C), deg(C)-1, deg(C)-2 の場合に対応する二重被覆 (C^,P^) のワイヤストラス半群を調べた.

４. 研究成果

初年度はまず、K3 曲面上の曲線に対する Brill-Noether 軌道の幾何学的記述を目標に研究を行った. そして、特にデルペッゾ曲

面の二重被覆として得られる非常に一般のK3 曲面上の曲線のクリフォード指数がambient space の楕円ペンシルの制限で計算されるための必要十分条件を得た（雑誌論文③）．並行して、平面曲線の二重被覆のramification point におけるワイヤストラス半群に関する研究を神奈川工科大学の米田氏と共同で行った．本研究では手始めに射影平面の滑らかな 6 次曲線で分岐する二重被覆の被覆変換により安定な曲線上の固定点におけるワイヤストラス半群を計算した(雑誌論文⑤）．また、それを元に平面曲線の二重被覆が射影平面のある被約 6 次因子で分岐する二重被覆へ拡張する為の条件を曲線の二重被覆の ramification point におけるワイヤストラス半群を用いて特徴づけた(雑誌論文②）．しかしながら、現時点では与えられた二重被覆型のワイヤストラス半群の情報が曲線の二重被覆の拡張として得られる射影平面の二重被覆の特異点の情報をどの程度反映しているかまではわかっていない．

次年度以降は当初の予定を変更し、曲線の Brill-Noether 理論における一つの重要な予想である Mercat 予想の部分的解決や代数曲面上の分解しない安定 ACM 束（算術的コーエン・マコーレー束）の存在問題へのアプローチを視野に研究を行った．本研究ではまず、それらの土台として K3 曲面上の与えられた偏極に関する ACM 直線束の分類を始めた．代表者は 3 次元射影空間の 4 次超曲面として得られる K3 曲面上の ACM 直線束を分類した(雑誌論文④)．一般に K3 曲面上の非特異曲線 C とその上の基点を持たない線形系 A が与えられたとき、A に属する任意の因子は Lazarsfeld-Mukai 束（以下 LM 束と書く）と呼ばれる K3 曲面上の階数 2 のベクトル束の切断による C への切り取りで得られる．本研究ではそのような曲線 C が決める偏極に関して C 上の線形系 A から決まる K3 曲面上の LM 束が ACM であることに着目した．そして、上記の結果(雑誌論文④）を用いて特に曲線 C が P^3 の 4 次超曲面の超平面切断である場合にそのゴナリティペンシルから決まる安定な LM 束であって、どんな直線束の拡張でも得られないものを構成した(雑誌論文①).

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

①Kenta Watanabe, On the splitting of Lazarsfeld-Mukai bundles on K3 surfaces, Journal of Algebra, vol.447, 445-454, 2016, DOI: 10.1016/j.jalgebra. 2015. 10.004, 査読あり.

② Jiryo Komeda and Kenta Watanabe, On extensions of a double covering of plane curves and Weierstrass semigroups of the double covering type, Semigroup Forum, vol.91, 517-523, 2015, DOI:10.1007/s00233-015-9718-0, 査読あり.

③ Kenta Watanabe, The Clifford index of line bundles on a 2-elementary K3 surface given by a double cover of a Del Pezzo surface, Geometriae Dedicata, vol.176, 329-343, 2015, DOI: 10.1007/s10711-014-9971-5, 査読あり.

④ Kenta Watanabe, The classification of ACM line bundles on quartic hypersurfaces in P^3, Geometriae Dedicata, vol.175, 347-354, 2015, DOI: 10.1007/s10711-014-9950-x, 査読あり.

⑤ Kenta Watanabe, An example of the Weierstrass semigroup of a pointed curve on K3 surfaces, Semigroup Forum, volume 86, pp 395-403, 2013, DOI:10.1007/s00233-012-9464-5, 査読あり.

〔学会発表〕（計　10　件）

① 渡邉健太　K3 曲面上の階数 2 の Lazarsfeld-Mukai 束の splitting について, 北海道教育大学 札幌サテライト(教室2), 第 3 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 平成 27 年 8 月 17 日- 8 月 19 日.

② 渡邉健太　K3 曲面上の階数 2 の Lazarsfeld-Mukai 束の splitting について, 東京電機大学（東京千住キャンパス）２号館５階２５０５教室, ホッジ理論と代数幾何学, 平成 27 年 8 月 6 日- 8 月 7 日.

③ 渡邉健太　種数 2 の K3 曲面上の ACM 束について, 琉球大学理学部, 代数多様体とその周辺, 平成 26 年 9 月 29 日-10 月 2 日.

④ 渡邉健太　種数 2 の K3 曲面上の ACM 束について, 旭川国際会議場（旭川大雪クリスタルホール), K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 平成 26 年 8 月 30 日-9 月 1 日.

⑤ 渡邉健太　P^3 の 4 次超曲面におけ

る ACM 直線束の分類とその応用, 日本大学文理学部 8 号館, 日大（月曜）特異点セミナー, 平成 26 年 6 月 16 日.

⑥ 渡邉健太　P^3 の 4 次超曲面における ACM 直線束の分類とその応用について, 首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス, 第 6 回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 平成 26 年 2 月 8 日.

⑦ 渡邉健太　The classification of ACM line bundles on quartic hypersurfaces on P^3, 首都大学東京南大沢キャンパス 12 号館 101 室, 第 11 回代数曲線論シンポジウム, 平成 25 年 12 月 21 日 - 12 月 23 日.

⑧ 渡邉健太　P^3 の 4 次超曲面上の ACM 直線束の分類について, 兵庫県立城崎大会議館, 代数幾何学城崎シンポジウム 2013（ポスターセッション）, 平成 25 年 10 月 22 日 - 10 月 25 日.

⑨ 渡邉健太　P^3 の４次超曲面における算術的コーエン・マコーレー直線束の特徴づけについて, 北海道教育大学　札幌駅前サテライト　教室３, K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ（飛び入り参加）, 平成 25 年 8 月 23 日- 8 月 26 日.

⑩ 渡邉健太　DelPezzo 曲面の二重被覆として得られる(ある種の) K3 曲面上の直線束のクリフォード指数, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, 代数幾何学セミナー, 平成 25 年 5 月 16 日.

〔その他〕

代表者のホームページ
http://www.geocities.jp/kenta314_math/

６．研究組織

(1)研究代表者
渡邉　健太(WATANABE KENTA)
大阪大学・理学研究科・招へい研究員
研究者番号：70582683

(2)研究協力者
米田　二良(KOMEDA　JIRYO)
神奈川工科大学・公私立大学の部局等・教授
研究者番号：90162065