様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　 6 月 13 日現在

機関番号：１３５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００４１
研究課題名（和文）シューベルト・カルキュラスの組合せ論とその応用

研究課題名（英文）Combinatorics of Schubert calculus and its application

研究代表者
成瀬　弘（NARUSE, Hiroshi）

山梨大学・総合研究部・教授

研究者番号：２０１７２５９６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：旗多様体のシューベルトクラスのK理論での代表を与える多項式についてその具体形を決めることを中心に研究を進めた。結果として古典型と呼ばれる旗多様体についてそのシューベルト類の多項式代表となる二重グロタンディエク多項式を決定することができた。また、応用としてフック公式と呼ばれる等式をシューベルト・カルキュラスの手法で証明することができた。さらに、その一般化の予想式を定式化した。関連してp-進代数群の表現に関するCasselman問題の一つの解をシューベルト・カルキュラスの手法で求めることができた。

研究成果の概要（英文）：We defined good polynomial representative of torus equivariant Schubert class in K-theory of flag varieties of the classical groups. We also give combinatorial formula for them. As an application of equivariant Schubert calculus we give a proof of the hook formula, which gives the number of standard tableaux on a given shape of partition. We also give a generalization of the hook formula and its equivariant K-theory version. By alanogy with this formula we get a solution to the Casselman's problem related to the representation of p-adic algebraic groups using some techinques of Schubert calculus.

研究分野：代数学

キーワード：シューベルト・カルキュラス　同変コホモロジー　同変K理論　対称函数　グラスマン多様体　一般コホモロジー　シューア函数　退化跡

１．研究開始当初の背景

シューベルト・カルキュラスは、比較的古い歴史をもつにも拘わらず現在でも盛んに研究されている分野の一つである。この理由としては、1982 年に Lascoux と Schutzenberger により、Schubert 多項式という整数係数で組合せ論的に扱いやすい多項式が発見されたことによると考えられる。これは、グラスマン多様体において Schur 多項式が Schubert 基底となることを旗多様体の場合に拡張したものと見ることができる。A 型以外の古典群 B,C,D 型について、同様の多項式が作れないかという事はそれ以降問題として様々なアプローチで研究がされたが階数によらない安定な多項式として定めることは不可能と考えられるようになった。実際、不可能であるということを証明する論文も登場した。しかしながら、池田、Mihalcea, 成瀬の３人の共同研究で、新たな発想により変数を増やして求める多項式を実現することができた。当初は、懐疑的な見解もあったが、次第にこの結果は専門家の間で受け入れられるようになった。

２．研究の目的

この研究における具体的な目的としては、同変コホモロジーに関して得られた結果を同変 K 理論の場合に拡張して行く事を基本的な目標とした。シューベルト基底に対応する多項式を具体的に構成し、それを利用してシューベルト・カルキュラスを組合せ論的に実行できるようにする事が目的である。さらに、その応用としてどのようなことが考えられるか考察する事とした。さらに、一般コホモロジーや量子コホモロジーの場合への拡張についても可能な限り考察することにした。

３．研究の方法

研究の方法としては、シューベルト・カルキュラスに関する基本的な文献により情報収集するとともに，研究者との直接の話し合いにより問題点の把握とその解決方策について検討をすることで研究を進めて行った。また，具体的な計算例を多く準備する必要があるため数式処理ソフトを用いて目的に応じたデータを作成した。研究成果については，途中経過も含めて国内・国外での研究集会で発表し、研究者との議論を行い助言等を得ることができるように努めた。

４．研究成果

研究成果については、以下のものが挙げられる。

(1)K 理論におけるシューベルト基底を代表する多項式として、B,C,D 型のグラスマン多様体の場合に、シューアの P-,Q-函数の K 理論での類似物を構成した事。実際この多項式がちょうどシューベルト類を代表することも同時に示した。多項式としてはコホモロジーの場合の factorial シューア P-Q-函数を変数βで変形した形となる。シューア P-Q-函数の場合と同様に、ある種のキャンセル性を持ち factorial シューア函数と同様の消去性も持っている。

(2)古典型グロタンディエク多項式の構成を Id-Coxeter 代数を用いて行うことができた事。この結果は、A.Kirillov 氏との共同研究に基づく。これにより得られた多項式は(1)で構成した多項式を特殊な場合として含んでいて Ikeda-Mihalcea-Naruse の二重シューベルト多項式の K 理論版となっている。より正確には、パラメータβを含み、β=0 のときがコホモロジー、β=-1 のときが K 理論のシューベルト基底となっている。これにより古典型の旗多様体のコホモロジー・K 理論を並行して扱うことができるようになった。これらの多項式を用いることで、シューベルト・カルキュラスがより具体的に実行できることになる。これらの古典型グロタンディエク多項式の組合せ論的な記述も行うことができ、将来的には構造定数もこれらの組合せ論的な対象により記述できることが示唆されている。

(3)双対グロタンディエク多項式に関する性質として、種々の行列式公式が作れること及びコーシー核に関する有限和がコホモロジーと K-理論で同じになることの証明を行った事。これは、A.Lascoux 氏との共同研究に基づく。この結果は双対グロタンディエク多項式が flagged シューア函数の特殊化として得られることを利用している。アフィングラスマン多様体の K ホモロジーを考えるときにはこの双対グロタンディエク多項式がシューベルト基底として重要な役割を果たすことになり、今後の研究のための基盤固めの役割を果たしている。

(4)シューア函数の一般コホモロジーへの一般化を行った事。シューアの S-,P-,Q-函数について、対称群の軌道和の形の定義を一般コホモロジーにおける形式群の演算規則を用いて一般化する事ができた。これにより一般コホモロジー理論におけるグラスマン多様体のシューベルト類を代表する函数の候補が得られた。実際この多項式は同変コホモロジー理論におけるシューベルト類が満たすべき消去性の性質を持っていることが示された。これらの結果は、さらに Hall-Littlewood 函数の一般コホモロジーにおける類似物を構成するという研究へと進んでいる。

(5)Vexillary と呼ばれる特殊な置換に対応するシューベルト/グロタンディエク多項式が一つの factorial シューア函数/グロタン

ディエク多項式で、パラメータをうまく並べることで表示できるという結果を得た事。これは左差分商の性質を用いて示すことができた。これまでのシューベルト・カルキュラスでは、ほとんどの場合、右差分商が主としてもちいられてきたのであるが、同変シューベルト・カルキュラスにおいては、左差分商が非常に有効に機能することが(1)の結果などで分かっていた。ここでもそれを利用することでVexillaryな置換に対応するシューベルト/グロタンディエク多項式を簡潔に記述することを組合せ論的に導くことができた。

(6)退化跡としてグラスマン多様体の場合のシューベルト/グロタンディエク多項式の記述を行った事。これは、T.Hudson, T.Ikeda, T.Matsumura らとの共同研究に基づく。この視点からA型グラスマン多様体のシューベルト類についての Jacobi-Trudi 型の行列式公式の自然なK理論への拡張が存在することもわかった。同様に、B,C 型の場合にもコホモロジーにおけるパッフィアン公式も自然な形でK理論の場合に導くことができた。

(7)同変コホモロジーの局所化の値に関する等式を利用することでヤング標準盤の個数に関する hook 公式と呼ばれる公式の証明およびその拡張の公式が作れることを見出した事。さらに、K 理論にいても同様の等式が作れることも示した。これは、シューベルト・カルキュラスの応用として捉えることができる。この研究結果を元にさらにこれを一般化した hook 公式の予想式を得ることができた。これらの考察が次の項目(8)の問題解決につながった。

(8) p 進代数群の表現に関連する Casselman 問題についてシューベルト・カルキュラスの手法を用いることで１つの解を得ることができた事。これには、ヘッケ環に関する Yang-Baxter 基底を用いた。A 型の場合に Lascoux 達が既に定義していたものを一般の Lie 群の型の場合に拡張し、ある種の双対性を示した。さらに、Kostant-Kumarの twisted な群環を考え、その中に必要な Demazure-Lusztig作用素を構成し、それを利用して基底の変換係数を記述することができた。

(9)C 型グラスマン多様体の同変量子コホモロジー環のシューベルト基底となる多項式代表を決定した事。これは、T.Ikeda, L.Mihalceaらとの共同研究であり、A型グラスマン多様体の場合の Mihalcea の結果の自然な類似となっている。すなわち、A 型の場合に Factorial シューア函数が量子同変コホモロジーの基底となるのと同様に、C 型の場合にFactorial シューアQ函数が量子同変コホモロジーのシューベルト基底であることを示した。証明の手法は、ほぼA型と同様であるが、この方法を論理的に見直したところA型の証明そのままでは不備があることが分かり、A 型の証明の改良も含む形の論法で証明を行う事ができた。また、同変量子コホモロジー環の生成元と関係式による表示も同時に得られた。これにより量子パラメータのqを0にすることで、同変コホモロジー環の生成元と関係式による表示も得られたことになる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① M.Nakagawa, H.Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions,ASPM volume ,査読有, to appear.

② T.Ikeda, L.Mihalcea, H.Naruse, Factorial P- and Q-Schur functions represent equivariant quantum Schubert classes, Osaka J. Mathematics, 査読有,vol.53, no.3 July, 2016, to appear.

③ M.Nakasuji, H.Naruse, Yang-Baxter basis of Hecke algebra and Casselman's problem (extended abstract), FPSAC 2016, Proceedings,査読有, pp.935-946.

④ A.Lascoux, H.Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 査読有,Volume 90, No.7(2014), 87-91.

⑤ T.Ikeda, H.Naruse, K-theoretic analogues of factorialSchur P- and Q-functions, Adv. Math. 査読有,243 (2013), no. 1, 22-66.

〔学会発表〕（計 8 件）

① 中筋麻貴、成瀬　弘、Casselman 問題と duality、日本数学会、2015 年 9 月 15 日、京都産業大学（京都府・京都市）

② 松村朝雄、池田　岳、成瀬　弘、T.Hudson, K 理論的Segre 類について、日本数学会、2015 年 9 月 14 日、京都産業大学（京都府・京都市）

③ 松村朝雄、池田　岳、成瀬　弘、T.Hudson, K 理論的シューベルト類の行列式公式、日本数学会、2015 年 9 月 14 日、京都産業大学（京都府・京都市）

④ 池田　岳、松村朝雄、成瀬　弘、T.Hudson，シンプレクティック・ベクトル束のＫ 理論的退化跡、日本数学会、2015 年 9 月 13 日、京都産業大学（京都府・京都市）

⑤ 中川征樹、成瀬　弘、普遍 Schur 関数に対する Gysin の公式、日本数学会、2015 年 3 月 21 日、明治大学（東京都・千代田区）

⑥ 池田　岳、古典型旗多様体の Ｋ 理論、日本数学会、2014 年 3 月 16 日、学習院大学（東京都・豊島区）

⑦ 成瀬　弘、A.Lascoux, Dual Grothendieck polynomials and finite sum Cauchy formula、日本数学会、2013 年 9 月 25 日、愛媛大学（愛媛県・松山市）

⑧ 成瀬　弘、Factorial Schur functions and vexillary permutations of types B, C and D, 日本数学会、2013 年 9 月 25 日、愛媛大学（愛媛県・松山市）

〔その他〕
ホームページ等
山梨大学　成瀬研究室
http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~hnaruse/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
成瀬　弘　（NARUSE, Hiroshi）
山梨大学・総合研究部・教授
研究者番号：２０１７２５９６

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
池田　岳　（IKEDA, Takeshi）
岡山理科大学・理工学部・教授
研究者番号：４０３０９５３９

中川　征樹（NAKAGAWA, Masaki）
岡山大学・教育学研究科・准教授
研究者番号：５０３７００３６

石川　雅雄（ISHIKAWA, Masao）
琉球大学・教育学部・教授
研究者番号：４０２４３３７３

萩原　学（HAGIWARA, Manabu）
千葉大学・理学研究科・准教授
研究者番号：８０４１５７２８