様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００４３

研究課題名（和文）凸多面体及びセル複体の面の個数の研究

研究課題名（英文）Face enumeration of convex polytopes and cell complexes

研究代表者
村井　聡（Murai, Satoshi）

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：９０５７０８０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、数学の組合せ論の分野において重要な研究対象である凸多面体やセル複体の面の個数に関する研究を行った。主要な研究成果は以下の二つである。
(１)凸多面体の持つ重要な組合せ論的不変量であるcd指数を、代数学を用いて研究する手法を新たに開発し、この手法を応用してcd指数に関する新しい不等式を発見した。
(２) モース不等式と呼ばれる幾何学的観点から得られる不等式と次数付きベッチ数と呼ばれる可換環論においてよく研究されている不変量を組合せることで、多様体の三角形分割の面の個数に関する新しい不等式を証明することに成功した。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we study the face numbers of polytopes and cell complexes. The followings are main results of this project.
(1) We find new method to study the cd-index of a convex polytope by using commutative algebra, and by applying this new method, we find new upper bounds of the cd-index.
(2) We find new applications of polyhedral Morse inequality and graded Betti numbers to the study of face numbers of triangulated manifolds.

研究分野：可換環論

キーワード：凸多面体　cd指数　三角形分割　スタンレー・ライスナー環

１．研究開始当初の背景

凸多面体やセル複体の面の個数の研究は，組合せ論の分野における主要な研究課題の一つである．特に，ここ 10 年ほどで，凸多面多面体の cd 指数や多様体の三角形分割の面の個数に関する研究が大きく進展している．

凸多面体の cd 指数は，1991 年に Bayer と Klapper により導入された組合せ論的不変量である．凸多面体の組合せ構造の研究では，f 列と呼ばれる不変量が良く調べられてきたが，cd 指数は f 列よりも詳しい情報を持つ組合せ論的な不変量であるため，凸多面体の組合せ構造を解析するための重要な道具として近年 cd 指数に注目が集まっている．特に，2006 年に Karu により長らく未解決であった cd 指数の非負性に関する予想が代数的な方法を用いて証明され，Karu の手法を改良することで cd 指数に関するより深い情報を得ることが期待されていた．

球面の三角形分割の面の個数の研究は数え上げ組合せ論における中心的な研究課題の一つであり，これまで盛んに研究が行われて来ている．球面の三角形分割に関する結果を，多様体の三角形分割の場合に一般化することは，数学的に自然に期待される事であるが，多様体の三角形分割の面の個数の研究は 20 世紀の間には良い研究手法が見つからず，研究があまり進んでいなかった．この問題に関し，2009 年に Novik と Swartz は，多様体の三角形分割の面の個数を，代数学の一分野である可換環論の手法を用いて上手く研究する手法を発見し，これを用いて多様体の三角形分割に関する様々な予想を解決した．この Novik と Swartz らが考案した手法をさらに発展させ，多様体の三角形分割の面の個数に関する研究をさらに進めることが期待されていた．

２．研究の目的

本研究課題では，凸多面体の cd 指数と，多様体の三角形分割の面の個数，という二つのテーマについて，可換環論を用いたアプローチから研究を行った．それぞれのテーマについて，以下を具体的な目標とした．

（１）cd 指数に関する研究

cd 指数に関する最も重要な定理の一つは，2006 年に Karu によって示された cd 指数の非負性に関する定理である．Karu は圏論的な手法を用いてこの定理の証明を与えたが，Karu の手法は非常に抽象的で扱いが難しく，cd 指数についてより詳細な情報を得るためには Karu の方法よりも扱いやすい代数的な手法を考案することが必要とされていた．本研究課題では，圏論よりもより具体的で扱いやすい可換環論を用いて cd 指数を研究する手法を開発することを目的として研究を行った．

（２）多様体の三角形分割に関する研究

Novik と Swartz らによって発見された，可換環論を用いて多様体の三角形分割を調べる手法をさらに発展させ，多様体の三角形分割の面の個数に関する新しい必要条件，十分条件を得ることを目的として研究を行った．特に，一次元球面と n 次元球面の直積の三角形分割について，面の個数が取りうる必要十分条件に関する予想を得ることを目標として研究を行った．

３．研究の方法

cd 指数，多様体の三角形分割の両方のテーマにおいて，スタンレー・ライスナー環と呼ばれる環を用いた代数的なアプローチから研究を行った．

（１）cd 指数に関しては，スタンレー・ライスナー環の概念を加群に一般化した squarefree 加群と呼ばれる代数的対象を用いて，cd 指数を加群の情報を用いて表す方法を模索した．特に，cd 指数を可換環論を用いて調べる為には，加群が何時自分自身の標準加群に埋め込む事ができるかが重要であることが判明しており，どのような squarefree 加群が自分自身の標準加群に埋め込めるか，という問題を調べる研究を進めた．

（２）多様体の三角形分割の面の個数については，2011 年に Bagchi と Datta により発見された，多面体的モース理論と呼ばれる幾何の理論を用いて面の個数を調べる手法に注目した．彼らの方法は，可換環論においてよく研究されている次数付きベッチ数と呼ばれる不変量に関する研究と深く関係しており，Bagchi と Datta の考案した手法に，次数付きベッチ数の理論を用いることで，面の個数に関する新しい情報を得る方法を模索した．

４．研究成果

本研究課題で得られた主要な研究成果について述べる．

（１）cd 指数に関する研究成果：

今回得られた大きな研究成果の一つは，cd 指数を可換環論を用いて調べる新しい研究手法を開発したことである．この研究成果は関西大学の柳川浩二准教授との共同研究によって得られた．具体的には，我々が現在 squarefree P-module と呼ぶ新しい代数的概念を定義し，この新しい概念を用いるこ

とで上手く cd 指数を調べることができることを発見した．また，この研究の過程で，cd 指数の理論が凸多面体だけでなく，一般の正則な CW-複体に拡張できることを発見した．さらに，導入した新しい研究手法を応用することで，単体的複体の重心細分のレフシェッツ性に関する Kubitzke と Nevo の予想を偶数次元の場合に解決し，加えて，今まで知られていなかった cd 指数に関する新しい上限を得る事に成功した．

今回得られた研究手法は今後の cd 指数や面の個数の数え上げの研究に大きく役立つことが期待される．実際，応募者はこの手法を用いて，Kubitzke-Nevo 予想の解決や cd 指数に関する新しい上限の発見といった組合せ論的に重要な結果を導く事に成功している．更に，今回の研究で cd 指数の概念が正則な CW 複体に拡張できたことにより，今まで凸多面体の場合の研究が中心であった cd 指数の理論をより広い対処に適応できるようになった．

（２）スタンレー・ライスナー環の標準加群への埋め込みに関するの研究成果：

明治大学の松岡直之講師との共同研究において，スタンレー・ライスナー環が自分自身の標準加群に次数を保ったまま埋め込める為の組合せ論的な必要十分条件を与え，それを可換環論において研究されている almost Gorenstein 性と呼ばれる性質の研究に応用した．

標準加群への埋め込み可能性の必要十分条件は，cd 指数の研究の副産物として得られた結果であるが，これを用いることて近年日本の可換環論の分野で良く研究されている almost Gorenstein 性と呼ばれる性質に対して，低次元の場合にスタンレー・ライスナー環が何時 almost Gorenstein になるかの組合せ論的な必要十分条件を得る事に成功した．Almost Gorenstein 性は，まだ余り研究が進んでいない代数的な性質で，almost Gorenstein 性を満たす様々な環の例を得る事が期待されていたが，本研究結果は次元の小さいスタンレー・ライスナー環の場合に almost Gorenstein となる為の必要十分条件を与える事により，この問題に貢献した．

（３）多様体の三角形分割の Tight 性に関する研究成果：

研究の方法の欄で既に述べた，Bagchi と Datta により考案された多面体的モース理論を用いて面の個数を調べる手法に，可換環論においてよく研究されていた次数付きベッチ数の上限に関する理論を適応することで，三角形分割の Tight 性に関する Kuhnel と Lutz の予想を部分的に解決することに成功した．

三角形分割の Tight 性は Kuhnel によって導入された概念で，多様体の最小三角形分割と関連する重要な性質である．1999 年に Kuhnel と Lutz は i 次元球面と j 次元球面の直積の三角形分割が tight であることと，三角形分割が丁度 i+2j+4 個の頂点を持つことが同値であることを予想した（但し i<j とする）．今回，多面体的モース理論と次数付きベッチ数の理論を上手く組み合わせる事で Kuhnel と Lutz の予想を上手く解く事ができることを発見し，上記の予想の十分性を j が i の 2 倍より大きい場合に解決した．

三角形分割の tight 性は，幾何学的な発想から考案された概念であり，その研究に可換環論の道具である次数付きベッチ数が利用できることは全く予想されていなかったことである．この手法は今後更に発展し，利用される事が期待される．

（４）Balanced Generalized Lower Bound Conjecture の解決：

2014 年に，Klee と Novik は d 彩色可能な d 次元単体的凸多面体の面の個数が balanced generalized lower bound 不等式と呼ばれる綺麗な不等式を満たす，という興味深い予想を提唱した．今回，オスナブリュク大学の Martina Juhnke-Kubitzke との共同研究により，この問題にスタンレー・ライスナー環を用いた代数的なアプローチが有効である事を発見し，予想を肯定的に解決することに成功した．

凸多面体の彩色可能性から，その面の個数に関する条件を得る結果は，数年前から研究が進められてきた新しい研究テーマである．本研究成果は，このテーマにおける重要な予想の一つを解決したもので，今後，様々な研究者により類似の定理の研究が大きく進められるれることが期待される．本研究結果は学術論文として取りまとめ，現在国際学術雑誌に投稿中である．

（５）境界を持つ多様体の三角形分割の面の個数に関する研究成果：

ワシントン大学の Isabella Novik との共同研究により，相対単体的複体のスタンレー・ライスナー加群と呼ばれる代数的対象が，境界を持つ多様体の三角形分割の面の個数を調べる際に有効であることを発見し，境界を持つ多様体野三角形分割の辺の個数の下限に関する Kalai, Novik, Swartz らによって証明されていた既存の結果を改良することに成功した．

この結果は，既知の結果の改良を与えているだけでなく，境界を持つ多様体の三角形分割の面の個数を調べる新しい手法も提供するものである．実際，Kalai や Novik, Swartz らによって証明された過去の結果において使われた研究手法は，高次元の面の個数の研究に適応する事ができなかったが，今回の研究手法は高次元の面の個数を調べる再にも自然に適応できることが分かっている．今回の研究で得られた手法は，今まで余り研究が進んでいなかった境界を持つ多様

体の三角形分割の面の個数の今後の研究に貢献することが期待される．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）
① Satoshi Murai and Isabella Novik, Face numbers of manifolds with boundary, International Mathematics Research Notice, 査読有, 採録決定済.
② Naoyuki Matsuoka and Satoshi Murai, Uniformly Cohen-Macaulay simplicial complexes and almost Gorenstein* simplicial complexes, Journal of Algebra, 査読有, vol 455, 2016, pp 14-31. DOI:10.1016/j.aim.2014.07.037
③ Satoshi Murai, Tight Combinatorial manifolds and graded Betti numbers, Collectanea Mathematica, 査読有, vol 66, 2015, pp. 367-386. DOI:10.1007/s13348-015-0137-z
④ Suyoung Choi, Mikiya Masuda and Satoshi Murai, Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds, Algebraic and Geometric Topology, 査読有, vol 15, 2015, pp. 965-986. DOI:10.2140/agt.2015.15.965
⑤ Satoshi Murai and Kohji Yanagawa, Squarefree P-modules and the **cd**-index, Advances in Mathematics, 査読有, vol 265, 2014, pp. 241-279. DOI:10.1016/j.jalgebra.2016.02.005

〔学会発表〕（計１３件）
① Satoshi Murai, Ring isomorphisms of cohomologies of certain toric manifolds, 第 37 回可換環論シンポジウム, 2015 年 11 月 22 日, 倉敷シーサイドホテル（岡山）
② 村井　聡, 多面体・多様体の stacked な三角形分割, Algebraic Topology from Combinatorial Viewpoint, 2015 年 10 月 31 日, 松山市子規記念博物館（愛媛）
③ Satoshi Murai, Average of polyhedral Morse inequalities and graded Betti numbers, Combinatorial and Experimental Methods in Commutative Algbera and Related Fields, 2015 年 10 月 9 日, Osnabruck（ドイツ)
④ 村井　聡, 多様体の三角形分割の組合せ論と可換代数, 第 60 回代数学シンポジウム, 2015 年 8 月 31 日, 静岡大学（静岡）
⑤ 村井　聡, d 彩色可能な d 次元単体的凸多面体の面の個数の下限について, デザイン, 符号, グラフおよびその周辺, 2015 年 7 月 10 日, 京都大学（京都）
⑥ Satoshi Murai, New inequalities for face numbers of d-colorble simplicial d-polytopes, Toric Topology 2015 in Osaka, 2015 年 6 月 16 日, 大阪市立大学（大阪）
⑦ 村井　聡, 球面の直積の三角形分割の tight 性について, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学（東京）
⑧ Satoshi Murai, A Lefschetz property for barycentric subdivisions, Workshop on Lefschetz properties in Goettingen, 2015 年 3 月 10 日, Goettingen(ドイツ)
⑨ Satoshi Murai, Balanced generalized lower bound inequality for simplicial polytopes, Geometric and Algebraic Combinatorics, 2015 年 2 月 6 日, Oberwolfach(ドイツ）
⑩ Satoshi Murai, Tight triangulations and graded Betti numbers, Meeting on Combinatorial Commuative Algebra, 2014 年 9 月 10 日, Levico Therme(イタリア)
⑪ 村井　聡, 柳川　浩二, 多面体的複体の flag h-列について, 日本数学会年会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学（東京）
⑫ Satoshi Murai, Squarefree P-module and its applications, Commutative Algebra and its interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, 2013 年 12 月 19 日, Hanoi（ベトナム)
⑬ Satoshi Murai, cd-index for CW-posets, Combinatorial Methods in Topology and Algebra, 2013 年 9 月 12 日, Cortona(イタリア)

〔産業財産権〕
特になし

〔その他〕
特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
村井　聡（Murai Satoshi）
大阪大学大学院情報科学研究科　准教授
研究者番号：90570804