様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　　６　月　２１　日現在

機関番号：１８００１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００４４

研究課題名（和文）表現論的構造のパラメタ変形を通じて捉えられる特殊関数の研究

研究課題名（英文）Study of special functions which are captured by parametric deformations of representation-theoretical structures

研究代表者
木本　一史（Kimoto, Kazufumi）

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：１０３７２８０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：良い不変性・対称性を持つ数学的対象として行列式と調和振動子を取り上げ，それらをパラメタによって変形したものを研究した．行列式のパラメタ変形を利用して行列式に近い相対不変式を作ることができ，それを利用した群行列式の拡張，対称群上の帯球関数や指標値に対する公式，ラテン方陣に関するAlon-Tarsi予想への応用などを与えた．調和振動子のパラメタ変形について，そのスペクトルゼータ関数の整数点での値から現れる関数はモジュラー形式に近い変換則を満たすが，そのような関数を含む枠組みの定式化，およびその性質の研究を行った．

研究成果の概要（英文）：We have studied a parametric deformation of the determinant and the quantum harmonic oscillator, which are equipped with nice invariance and symmetries.
As for the parametric deformation of the determinant, we have utilized relative invariants defined by such a deformation to introduce and study a generalization of the group determinants, to give a formula for the value of zonal spherical functions and irreducible characters for symmetric groups, and to prove the Alon-Tarsi conjecture on Latin squares in special cases.
As for the parametric deformation of the quantum harmonic oscillator, we have studied the functions which arise from a certain special value of the associated spectral zeta function which satisfies transformation rules similar to those for modular forms.

研究分野：数物系科学

キーワード：非可換調和振動子　スペクトルゼータ関数　アルファ行列式　リース行列式　帯球関数　ラテン方陣

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究の立脚点となる考え方

数学的対象の一般化・類似は様々なやり方で行われるが，ここでは特に，たとえば量子群や楕円積分などに見られる「パラメタによる変形・拡張」という処方に着目する．パラメタ変形を考えるとき，そこには（たとえば元の理論で成立する定理がパラメタ変形の後にも同等の形式で成立するか，などといった）様々な問題意識がありうるが，本研究における興味は“適当な意味で対称性の高い対象に「良い」パラメタ変形を施したとき，その変形によって生じる「ずれ」を適当に定量化することで得られる「対称性の崩れ方を反映する量」は興味深い量となるであろう”という期待にある．

この期待に添うような例であると考えられる具体的な対象として，本研究においては「行列式と量子調和振動子のパラメタ変形」である「α-行列式」と「非可換調和振動子」を扱った．

以下ではまず，本研究のキーワードであるこれら「α-行列式」「非可換調和振動子」について，これまでの研究成果を交えながら，研究開始当初におけるそれぞれの背景を簡単に説明する．

(2) α-行列式について

α-行列式とは

$$\det{}^{(\alpha)}(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{\nu(\sigma)} x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\cdots x_{\sigma(n)n} \qquad (X = (x_{ij})_{1\le i,j\le n})$$

によって定義される通常の行列式のパラメタ α による変形である（Vere-Jones, 1988）．ここに $\nu(\sigma)$ は行列のサイズ n から置換 σ をサイクル分解したときのサイクルの個数を引いたものである．α-行列式は通常の行列式（$\alpha = -1$ の場合）とパーマネント（$\alpha = 1$ の場合）とをパラメタ α で補間している量である．

行列成分 x_{ij} を変数と見て，これらの変数に関する多項式環に普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$ を自然に作用させるとき，行列式とパーマネントは共に既約表現を生成する巡回ベクトルとなる．従って α-行列式の生成する巡回 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-加群の構造を調べることは“$\alpha$-行列式の行列式やパーマネントからの「ずれ」”を表現のレベルで見ることに相当すると言える．より一般に α-行列式の冪 $\det^{(\alpha)}(X)^m$ が生成する巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det^{(\alpha)}(X)^m$ の既約分解を考えると，m が正整数ならば各既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-加群 M ごとにある $\mathbb{C}[\alpha]$-成分の正方行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ が対応して $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det^{(\alpha)}(X)^m$ における M の重複度が $F^M_{n,m}(\alpha)$ の階数で与えられる（Kimoto-Matsumoto-Wakayama, 2009）．いくつかの特別な場合には行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ は具体的に書き下すことが出来，特に $n = 2$ のときには $F^M_{2,m}(\alpha)$ は（M の次元から決まる）超幾何多項式を用いて書くことが出来る．この問題の q-類似を考えることも出来（量子行列環において α-行列式の q-類似を定義し，その冪乗が量子包絡環 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$ の自然な作用によって生成する巡回加群の既約分解を考える），やはり $n = 2$ の場合には超幾何多項式の q-変形を用いて同様の具体的な結果が得られる（Kimoto, 2010）．

(3) 非可換調和振動子について

次に非可換調和振動子とは，2 つの実パラメタ α, β を含む行列型微分作用素

$$Q = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\right) + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right)$$

によって与えられる常微分方程式系である（Parmeggiani-Wakayama, 2002）．パラメタに関する適当な条件の下で Q はベクトル値の L^2-空間 $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の非有界な正定値自己共役作用素を定め，しかも離散固有値のみを持つ（以下，この条件を常に仮定する）．2 つのパラメタの値が等しいとき Q は調和振動子の組（の定数倍）とユニタリ同値になることから，非可換調和振動子は調和振動子の一般化・多次元化とみなすことができる．

調和振動子の場合はその固有値を完全に決定できるが，一般の非可換調和振動子では具体的に個々の固有値を求めることは極めて難しいと考えられている．そこで固有値の全体的な振る舞いを見るものとして，固有値のディリクレ型母関数として定義されるスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ を考える．$\alpha = \beta$ のとき，スペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$

はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と本質的に等しくなる．つまり $\zeta_Q(s)$ は $\zeta(s)$ の暗示的なパラメタ変形とみなすことが出来る．全平面への解析接続，$s=1$ における単純極，自明な零点の存在といったいくつかの性質が $\zeta_Q(s)$ においても $\zeta(s)$ と同様に成り立つ（Ichinose-Wakayama, 2005）．

このスペクトルゼータ関数の特殊値（正整数点での値）は，おおよそ「リーマンゼータ値 + 剰余項（$\alpha=\beta$ のとき消える項）」という形に切り分けることが出来る（Kimoto, 2010）．この「剰余項」が“調和振動子と非可換調和振動子との「ずれ」”を反映する量だと考えられる．$\zeta_Q(2)$ に対する剰余項は完全楕円積分を用いて書くことが出来（Ochiai, 2008），さらに合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に対する重さ 1 のモジュラー形式とも密接に関係している（Kimoto-Wakayama, 2007）．剰余項はこれら以外にも様々な派生的問題を生み出す母体となっている（たとえば多重 L-値の類似; Kimoto-Yamasaki, 2009）．また $\zeta_Q(4)$ に対する剰余項はモジュラー形式ではないがそれに近い変換則を満たす関数を用いて表すことができる（Kimoto-Wakayama, 2013）．これら以外の特殊値 $\zeta_Q(n)$ に対する剰余項の構造は明らかではない．

2. 研究の目的

以上のような背景の下，本研究は以下に示すような事項を明らかにすることを目的に掲げて開始された．

(1) α-行列式およびその q-類似の冪が生成する巡回加群の構造を統制する特殊多項式の研究

各既約成分の重複度を与える（上述の）行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ の成分の具体的計算について

① 一般的な公式を目指しつつ，新たな明示公式の系列を得ること．
② 既に得られている場合の結果の背後にあるメカニズムの解析，すなわち特殊多項式が現れる理由を明らかにすること．
③ 背後にある表現の構造から微分方程式（や差分方程式）のような性質を導出すること．

(2) 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の「剰余項」が生み出す関数の研究

上述のように $\zeta_Q(4)$ の剰余項はモジュラー形式に近い変換則を満たす関数によって表示することができることから，

① 剰余項を記述する関数を含む枠組み（アイヒラー形式と呼んでいる）の定式化．
② アイヒラー形式について，特にそれらがなす空間の構造の研究．

3. 研究の方法

(1) 周辺研究者との議論

本研究課題の対象と関連する研究を行っている，あるいは興味を持ってくれる研究者との議論を行った．研究集会や学会への参加，他研究機関への訪問，研究者の招聘などによってそのような機会を持った．

(2) 計算機の援用

母関数の満たす（微分方程式などの）関係式の観察，具体的なアイヒラー形式のフーリエ係数の数値計算，特別な形の行列に対するリース行列式の計算などのために，Mathematica や Maple といったソフトウェアを利用した計算機による実験を積極的に活用した．

4. 研究成果

具体的な成果は以下の通り．

(1) α-行列式について

当初の目的と密接に関係する計算から，当初の思惑とは若干異なる方向に研究が進んだ．

① 有限群の群行列式は正則表現の情報を反映した量であることから，表現論の黎明期において重要な役割を果たした．比較的近年に，群行列式はその群の同型類に関する完全不変量を与えていることが明らかになった（Formanek-Sibley, 1991）．また，群とその対称生成系から

定まるケイリーグラフは，ラマヌジャングラフと呼ばれる応用上も重要なグラフの構成に用いられるが，ケイリーグラフを「群とその部分群のペア」に対して拡張する試みがなされている（Reyes-Bustos, 2016）．このような背景のもと，群行列式を「群とその部分群のペア」に対して拡張したものをリース行列式を用いて定式化し，特に有限アーベル群の場合に詳しく調べた．群行列式とは異なり成分の並び順に依存して決まるので，群の元の良い順序付けを選ぶ必要があるが，自然な順序付けと変数の特殊化の下で，群行列式の拡張がきれいな因数分解公式を持つことなどを示した．

② 長方形のヤング図形に対応する対称群の既約指標や，長方形のヤング図形に対応するヤング部分群に関する対称群上の帯球関数（両側不変関数）の値をリース行列式の比として表示する公式を得た（既約指標値の公式は Stanley (2003) の結果と同等なものである）．この結果の応用として，Alon-Tarsi 予想と呼ばれる予想の（既知の）特別な場合にリース行列式を用いた簡明な別証明が付けられることを明らかにした（論文準備中）．各行各列が $1, 2, \ldots, n$ の順列であるような n 次行列を n 次のラテン方陣と呼び，それらは偶方陣と奇方陣とに分けられる．n が偶数の時，n 次の偶方陣と奇方陣の個数は異なる，という予想は Alon-Tarsi 予想と呼ばれ，様々な組み合わせ論の予想とも関係して興味を持たれている．偶方陣と奇方陣の個数の差を考えると，これがある場合の帯球関数の値の定数倍に等しいことがわかり，このことと先述の公式とを組み合わせることで $n = p - 1$（p は奇素数）の場合には Alon-Tarsi 予想が成立することが導かれる．これ以外の場合に対するリース行列式を用いたアプローチは今後の課題である．

(2) 非可換調和振動子について

① 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値 $\zeta_Q(4)$ において，その剰余項を記述するアペリ型数列の母関数は合同部分群に対するモジュラー形式もどき（モジュラー変換則を少しずらした形の変換則を満たす関数）を使って書ける．$\zeta_Q(2)$ と $\zeta_Q(4)$ における状況から，一般に特殊値 $\zeta_Q(2k)$ の剰余項の記述にもそのようなモジュラー形式もどきが現れることを期待するのは自然であると考えられる．そこで，モジュラー形式もどきを含む一般的な枠組みを作る試みとして，アイヒラー形式という関数を定式化した．その性質，たとえばアイヒラー形式のなす空間やそこから自然に定まるコホモロジー群の構造，ヘッケ理論の類似，などについて研究を進めてきた．定式化の再検討を含めて今後も研究を続ける（九州大学の若山正人との共同研究，論文準備中）．

② なお本研究の成果ではないが，長らく未解決であったアペリ型数列（の有理数部分）に関する合同式の予想（Kimoto-Wakayama, 2006）が，本研究期間中に Long, Osburn, Swisher らによって証明されたことを付記しておきたい．

5. 主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① K. Hamamoto, K. Kimoto, H. Tachibana and M. Wakayama: Wreath determinants for group-subgroup pairs. J. Combin. Theory Ser. A 133 (2015), 76–96.（査読有り）

② K. Kimoto: Alpha determinants and symmetric polynomials. Algebraic Combinatorics related to Young diagram and statistical physics. RIMS Kôkyûroku 1913 (ed. M. Ishikawa), 2014, 81–92.（査読無し）

〔学会発表〕（計 2 件）

① 木本 一史，若山 正人，群・部分群対に対する群行列式の類似，日本数学会 2015 年度秋期総合分科会，京都産業大学，京都府，2015 年 9 月 15 日

② 木本 一史，行列式の 2 パラメタ変形と長方形指標公式，日本数学会 2014 年度年会，学習院

大学，東京都，2014 年 3 月 16 日

〔その他〕

- 研究集会等での講演（アウトリーチ活動）

① K. Kimoto: Spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, CREST 暗号数理ワークショップ「L 関数と暗号」，九州大学，2016 年 3 月 24 日
② K. Kimoto: Alpha-determinants and the Alon-Tarsi conjecture. Tutorials and Workshop on New Developments in Representation Theory, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2016 年 3 月 9 日
③ 木本 一史: 非可換調和振動子の数論．大阪大学整数論・保形形式セミナー，大阪大学，2015 年 12 月 18 日
④ 木本 一史: 表現論と数え上げ問題，CREST 暗号数理・平成 27 年度第 2 回全体会議＋チュートリアル講演，九州大学，2015 年 12 月 15 日
⑤ 木本 一史: 不完全ラテン方陣の数え上げと対称群，研究集会「表現論がつなぐ数学 2015」，JR 九州ホテル鹿児島（鹿児島市），2015 年 9 月 18 日
⑥ 木本 一史: ラテン方陣と不変式，研究集会「不変性と双対性」，鹿児島大学，2015 年 9 月 6 日
⑦ 木本 一史: アルファ行列式の表現論と組合せ論，第 4 回広島組合せ論セミナー，広島大学，2015 年 1 月 26 日
⑧ K. Kimoto: Remarks on Apery-like numbers (and Witten zeta functions), Zeta Functions in OKINAWA 2014，沖縄コンベンションセンター（宜野湾市）, 2014 年 10 月 28 日
⑨ K. Kimoto: Number Theory in the Spectrum of the Non-Commutative Harmonic Oscillator, Workshop ”Mathematics and Physics of Interacting Quantum Systems”，九州大学，2014 年 10 月 23 日
⑩ 木本 一史: Alon-Tarsi 予想とリース行列式，研究集会「表現論がつなぐ数学 2014」，サンポートホール高松（高松市），2014 年 9 月 30 日
⑪ 木本 一史: Alon-Tarsi 予想とリース行列式，One-day workshop，高知大学，2014 年 6 月 7 日
⑫ 木本 一史: アルファ行列式の置換による重み付き平均について，愛媛大学代数セミナー，愛媛大学，2013 年 12 月 16 日
⑬ K. Kimoto: Remarks on residual modular forms, Zeta Functions in OKINAWA 2013，沖縄コンベンションセンター（宜野湾市）, 2013 年 10 月 22 日
⑭ 木本 一史: Averages of alpha-determinants over permutations, 研究集会「表現論がつなぐ数学」，ひめぎんホール別館（松山市），2013 年 9 月 28 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木本　一史 (KIMOTO KAZUFUMI)
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：10372806