

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 9 月 16 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400051

研究課題名(和文) Almost Gorenstein環とUlrich加群の構造解析

研究課題名(英文) Structure of almost Gorenstein rings and Ulrich modules

研究代表者

後藤 四郎 (Goto, Shiro)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：50060091

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：先行する1次元のalmost Gorenstein環論を必ずしも解析的不分岐ではない一般の1次元局所環に対し拡張した。また、可換環論の関連分野への応用を図りながら、高次元の局所環と次数環に対するalmost Gorenstein環の定義を提案し、高次元のalmost Gorenstein環の基礎理論を構築した。イデアルに随伴するRees代数のalmost Gorenstein性解析に着手し、基礎環が正則局所環の場合や考えるイデアルが巴系の場合には、満足すべき成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：The notion of almost Gorenstein local ring given by V. Barucci and R. Froberg for one-dimensional analytically unramified Noetherian local rings is generalized for arbitrary Noetherian local rings and a basic theory is developed. The higher dimensional definition is safely introduced also for Noetherian local/graded rings. The theory of almost Gorenstein Rees algebras associated to ideals is well developed and there are obtained satisfactory results in the case where the base rings are regular local rings or the case where the ideals are generated by subsystems of parameters in Cohen-Macaulay local rings.

研究分野：代数学(可換環論)

キーワード：Cohen-Macaulay ring Canonical module Almost Gorenstein ring Ulrich module Gorenstein ring

1. 研究開始当初の背景

本研究の背景には「Cohen-Macaulay 環は、なぜかとも多様なのか」という素朴な問いと、「Gorenstein 環でない Cohen-Macaulay 環をもう少しきめ細かく分類したい」という願望がある。Cohen-Macaulay 性解析に従事すると、Gorenstein 環でない Cohen-Macaulay 環がなぜこんなにも大量に存在するのかという疑問に捕われる。実際、不変式論や代数幾何学、組み合わせ論などで出会う様々な Cohen-Macaulay 環は、Gorenstein 環でないことが多い。

Gorenstein 環は局所的な自己入射次元の有限性によって定義されるが、具体的な個々の環にとって、自己入射次元が有限であるという条件と、自己入射次元が有限でないという条件の間には、相当な隔りがある。これを鑑みるに、Gorenstein 環ではないが、Gorenstein 環に準ずる Cohen-Macaulay 環の新たなクラスの提示が求められていると言ふべきかもしれない。可換環論の発展にとっても、Cohen-Macaulay 環の意味のある新クラスが発見され、解明されることの意義は小さくないであろう。1次元の解析的不分岐局所環に対して V. Barucci と R. Froberg [a] が提示した「almost Gorenstein 環」は、この要請に対する優れた回答の一つである。Cohen-Macaulay 性は、ホモロジー代数的に定義される環構造である。Noether 局所環 A は、等式 $\dim A = \text{depth } A$ が成り立つとき、Cohen-Macaulay であるという。局所環でない Noether 環 A は、素イデアル p に対する全ての局所化 A_p が Cohen-Macaulay であるとき、Cohen-Macaulay 環であるという。20世紀後半に入って、不変式論、代数幾何学、特異点論、組み合わせ論に現れる様々な環の Cohen-Macaulay 性判定が、M. Hochster, J. Herzog, D. Eisenbud 達によって精力的に実施され、一方で、代数的組み合わせ論への応用が R. Stanley によって発見されるなど、今日ではあらゆる処に Cohen-Macaulay 環が見出されるに至っている。この間に、1963年に H. Bass [b] によって導入された Gorenstein 環論は、E. Kunz - J. Herzog により、正準加群の理論として書き直され、現代可換環論の基盤の一つとなった。

数値半群環 A が Gorenstein であるための条件が数値半群 H の対称性にあることは、E. Kunz - J. Herzog によって知られて久しい。この例を見ても、Gorenstein 環は希であり、多数派はやはり非 Gorenstein 環であると言ふべきであろう。

2. 研究の目的

本研究では、具体的課題を下記のように設定し、3年間で成果を挙げることを目指した。

課題(1) 解析的不分岐でない 1次元 Cohen-Macaulay 局所環に対し、almost Gorenstein 環の定義を提案し、Barucci - Froberg [a] の理論

を拡張しながら具体例を解析し、論文[a]で未解決に終わった諸問題の解決を図る。

課題(2) **課題(1)**の成果を踏まえ、高次元 Cohen-Macaulay 局所環に対し almost Gorenstein 環を定義して基礎理論を展開し、応用を述べる。

課題(3) 高次元次数環に対し almost Gorenstein 環を定義し、その汎在性を保証する。

課題(4) almost Gorenstein 環の高次元化に必要な Ulrich 加群の理論を整備する。

3. 研究の方法

課題(1)は、松岡直之(明治大学兼任講師)、チャン ティ フンとの共同研究[c]として実施され、1次元の局所環論に新たな視点と問題を提供している。研究が完成すれば、高次元の almost Gorenstein 環論で確立すべき理論の大枠を予測することが可能となる。**課題(2)**、**(3)**については、居相真一郎(北海道教育大学准教授)や、高橋亮(名古屋大学准教授)との共同研究[d]により、高次元の局所環と次数環に対する定義が把握されつつあった。組み合わせ論との関連でも Cohen-Macaulay 次数環の研究が充実して来ているが、**課題(3)**の研究の完成時には、これら次数環論研究に新たな地平と展望が齎されると予想される。

課題(4)に関しては、大関一秀(山口大学専任講師)、高橋亮、吉田健一(日本大学教授)、渡辺敬一(同)との共同研究[e]によって基礎理論が整備され、2次元までとはいえ深い理論が姿を現しつつある。

これらはすべて、研究代表者を中心とする日本発の独創的研究であって、非 Gorenstein な Cohen-Macaulay 局所環/次数環の理論構築に新たな展望を与えるものである。以上の予備的研究を精査して完成させ、広く世界に公表することを本研究の任務とした。

<引用文献>

[a] V. Barucci and R. Froberg, One-dimensional almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, 188 (1997), 418-442.

[b] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, 82 (1963), 8-28.

[c] S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, arXiv:1106.1301.

[d] S. Goto and R. Takahashi, Almost Gorenstein rings of higher dimension (preprint 2012).

[e] S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K.-I. Yoshida, and K.-i. Watanabe, Ulrich modules and ideals, arXiv:1206.3197.

4. 研究成果

(1) 主な成果と成果の国内外における位置づけ

課題(1)は、松岡直之(明治大学専任講師)、連携研究者チャンティフン(明治大学ポスト

ドクター)との共同研究として実施され, 成果は論文 (下記「発表論文」参照)で公表した。解析的不分岐ではない1次元の局所環論に新たな視点と問題を提供しただけではなく, 解析的不分岐という枠組み内では解決が不可能であった問を, 枠組みを広げることによって解決するという快挙をなし遂げている。この研究により高次元の almost Gorenstein 環論で確立すべき理論の大枠がつかめたので, 論文にまとめた。高次元の理論は先行する Cohen-Macaulay 環論と正準加群の理論を総動員する大規模なものであって, 論文の印刷ページ数は46ページに達した。同論文はすでに almost Gorenstein 局所環/次数環論における基本文献となっている。

組み合わせ論との関連でも Cohen-Macaulay 次数環の研究がめざましく充実して来ているが, これら組み合わせ論内でも almost Gorenstein 次数環論研究に新たな地平と展望が齎されつつあることは悦ばしい。

課題(4)に関しては, 吉田健一, 渡辺敬一の参加により, 2次元までとはいえ深い驚くべき理論が姿を現した。成果は論文とにまとめられているが, 研究そのものは未だ発展中である。

これらはすべて, 研究代表者を中心とする日本発の独創的研究であって, 非 Gorenstein な Cohen-Macaulay 局所環/次数環の理論構築に新たな展望を与えるものであることは, 大書すべきであろう。本研究のすべての具体的課題に対し, 満足すべき成果が得られたと評価している。

(2) 今後の展望

本研究は現在も活発な展開を見せつつあり, Rees 代数の almost Gorenstein 性に関しては, 様々なイデアルに関する Rees 代数の中から興味深い almost Gorenstein 環が姿を現しつつある。成果の一部は下記論文に発表されている。

1. S. Goto, R. Mehran, N. Taniguchi, and H. L. Truong, When are the Rees algebras of parameter ideals are almost Gorenstein rings?, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計13件, すべて査読有り)

S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of parameters, J. Algebra, 452 (2016), 263-278.

S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings, J. Pure and Appl.

Algebra, 220 (2016), 3425-3436.

S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Ulrich ideals and almost Gorenstein rings, Proc. Amer. Math., 144 (2016), 2811-2823.

L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and V. W. Vasconcelos, The Chern and Euler coefficients of modules, Acta Math Vietnam., 40 (2015), 37-60.

S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Almost Gorenstein rings - towards a theory of higher dimension, J. Pure and Appl. Algebra, 219 (2015), 2666-2712.

S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Huneke-Wiegand conjecture and change of rings, J. Algebra, 422 (2015), 33-52.

S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K.-i. Yoshida, and K.-i. Watanabe, Ulrich ideals and modules, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 156 (2014), 137-166.

S. Goto and K. Ozeki, The first Euler characteristics versus the homological degrees, the Proceedings of the 2012 Conference at IMPA, Bull Braz Math Soc, New Series 45 (4) (2014), 679-709.

S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, J. Algebra, 379 (2013), 355-381.

S. Goto, L. O'Carroll, and F. Planas-Vilanova, J. Sally's question and a conjecture of Y. Shimoda, Nagoya Math J., 211 (2013), 137-161.

N. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, The equality $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}\mathcal{I}$ in sequentially Cohen-Macaulay rings, J. Algebra, 379 (2013) 50-79.

N. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, Hilbert coefficients and sequentially Cohen-Macaulay modules, Journal of Pure and Applied Algebra, 217 (2013) 470-480.

L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, and W. V. Vasconcelos, Variation of Hilbert Coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 141 (2013), 3037-3048.

[学会発表](計7件)

後藤四郎, Almost Gorenstein rings - towards a theory of higher dimension --. The 24-th Iranian Algebra Seminar, November 12-13, 2014, Dedicated to Professor Zakeri, Kharazmi University, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Karaj (Iran).

後藤四郎, Huneke-Wiegand conjecture and change of rings, Institute for Research in Fundamental Sciences(IPM), The 11th Seminar on Commutative Algebra

and Related Topics, November 10-11, 2014, Teheran (Iran).

後藤四郎, Ulrich ideals and modules, Institute for Research in Fundamental Sciences(IPM), The 11th Seminar on Commutative Algebra and Related Topics, November 10-11, 2014, Teheran (Iran).

後藤四郎, Almost Gorenstein rings - towards a theory of higher dimension, Commutative Algebra and Singularity Theory (dedicated to Kei-ichi Watanabe on occasion of his 70-th birthday), 2014年7月28日 8月1日, 富山

後藤四郎, Ulrich ideals and modules, 第58回代数学分科会シンポジウム, 2013年8月25日-29日, 広島大学

後藤四郎, On the Hilbert polynomials of j -transforms, International conference on commutative algebra and its interaction to algebraic geometry and combinatorics, December 18-20, 2013, Hanoi (Vietnam).

後藤四郎, Huneke-Wiegand conjecture, Commutative algebra and its interactions with algebraic geometry, 2013年7月6日~2013年7月14日, CIRM, Luminy (France).

〔その他〕

ホームページ等

[http:// http://www.commalg.jp/~goto/](http://http://www.commalg.jp/~goto/)

6. 研究組織

(1)研究代表者

後藤 四郎 (GOTO Shiro)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号 : 50060091

(2)研究分担者

居相 真一郎 (IAI Shin-ichiro)

北海道教育大学・教育学部・准教授

(3)連携研究者

チャン ティ フン (TRAN Thi Phuong)

明治大学・研究知財戦略機構・ポストドク

ター

研究者番号 : 00649824