様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００５３

研究課題名（和文）正標数の射影代数幾何

研究課題名（英文）Projective Algebraic Geometry in Positive Characteristic

研究代表者
梶　元（KAJI, Hajime）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：７０１９４７２７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：非特異射影多様体上のベクトル束に付随するグラスマン束の次数公式を，寺杣友秀氏との共同研究により得た．成果は寺杣氏との共著論文にまとめ学術雑誌に発表した．また，射影多様体の一般ガウス写像の研究を行い，ヴェロネーゼ多様体のガウス写像の像の次数公式を得た．これはブールの古典的公式の一般化をあたえる．これまで研究を継続していた接的退化曲線の線型退化性については，論文にまとめ学術雑誌に発表した．

研究成果の概要（英文）：I obtained a degree formula for Grassmann bundles associated to vector bundles on non-singular projective varieties, as a joint work with Tomohide TERASOMA. I wrote a joint paper with TERASOMA for the resuls, and published it in a scientific journal. I also studied the higher Gauss maps for projective varieties, and obtained a degree formula for the images of higher Gauss maps of Veronese varieties, which yields a generalization of the classical formula by Boole. I wrote a paper for the result of a continued work on the linear degeneration of tangentially degenerate curves, and published it in a scientific journal.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学　射影双対　ガウス写像　正標数

１．研究開始当初の背景

(1) 射影多様体に対する再帰性とガウス写像の分離性の関係

S. Kleiman-R. Piene (1993) により「再帰的ならばガウス写像が分離的となる」ことが知られている．その逆の真偽については，2001 年応 募者により双有理的ガウス写像をもつ非再帰的射影多様体が発見され，否定的に解決された．その後さらに，深澤 知氏(山形大学) と研究代表者の研究により，dimX ≤ 2 の場合は逆も成り立ち，dimX ≥ 3 の場合については，任 意次元・任意標数における反例が与えられている．さらに最近の研究により，正標数の任意の代数多様体はガウス写像が双有理的となる非再帰的射影モデルをもつことが証明されている．

⑵ ガウス写像により引き起こされる関数体の拡大

Kleiman による問題提起（S. Kleiman, “ Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review, ” Proc. Symposia Pure Math. 46-2 (1987), pp. 321-370. ）が，この研究の端緒である．これを関数体の拡大の言葉に言い換えると，ガウス写像 γ による関数体の拡大 K(C)/K(γ(C)) の分離次数が 1 とならない非特異射影曲線 C を見つけよ．または，分離次数が 1 となることを証明せよ」となる．これに対しては，研究代表者は，有理曲線と楕円曲線に対してガウス写像により現れる関数体の拡大をすべて決定し，有理曲線ではどんな非分離拡大も現れること，楕円曲線については超特異的か否かによる大きな差異 のあることを示した．また，種数 2 以上の場合は常にガウス写像は分離次数 1 となることを示した．さらに高次元の場合，Kleiman-Piene，および，野間淳氏や研究代表者による研究がある．ただし，ガウス写像が分離次数 1 となる十分条件を与えるか，または，非自明な分離次数をもつ例を構成するに 留まっているのが現状である．

２．研究の目的

一般の代数閉体上の射影代数幾何において，正標数特有の現象を研究することを目標とする．特に，射影多様体の双対多様体とガウス写像に焦点を当て，多様体が次元 1 ないし埋め込まれた射影空間に おける余次元が 1 の場合に知られていた結果を，高次元化・高余次元化することを目的とする．具体的には以下の問題を考える．

⑴ 射影多様体に対する再帰性とガウス写像の分離性の関係

ガウス写像が双有理的となる非再帰的射影埋込みをもつ非特異射影多様体の分類を行いたい．再帰性とガウス写像の双有理性という，既存の研究とは異なる新しい視点・切り口からの正標数の射影多様体の分類が可能ではないかと期待される．

⑵ ガウス写像により引き起こされる関数体の拡大

与えられた代数多様体 X に対して，その射影埋め込みに応じて現れるガウス写像 γ による関数体の拡大 K(X)/K(γ(X)) の決定を目指したい．研究期間内においては，まず X がアーベル多様体の場合に的を絞る．一方，この問題の別の攻め方として，ガウス写像が非分離的となる射影埋込みをもつ射影多様体の分類を目指す．

３．研究の方法

(1) ガウス写像が非分離的となる射影埋込みをもつ射影多様体の分類を目指す．解決に向けて，射影多様体に特異点を許した場合と非特異の場合に分けて考える．

① 射影多様体に特異点を許す場合：問題「与えられた代数関数体の非分離的有限次拡大 L/K に対して，L の射影モデル X で，L = K(X) において K = K(γ(X)) となるものが存在するか?」 を考えたい．代数関数体の次元（すなわち，基礎体上での超越次数）が 1 の場合には，研究代表者の従来の研究により肯定的であることが示されている．dim K ≥ 2 の場合について部分解は得ている：すなわち，L/K が純非分離的でさらに L ⊇ K ⊇ L^p の場合には求める射影モデルが存在することが，連携研究者に挙げた深澤知氏（山形大学）と研究代表者の共同研究により解っている（p > 0 は基礎体の標数である)．残るは，高い非分離次数や非自明な分離次数をガウス写像により如何に実現するかである．引き続き深澤氏との共同研究を行う計画である．深澤氏の協力をあおぎ，Singular などの計算代数システムを使った計算実験を行うことにより解決の糸口を見出したい．そのためには深澤氏との研究打合せが不可欠である．

② 非特異射影多様体の場合：ガウス写像の（微分の）階数が零となる射影埋込みをもつ （非特異）射影多様体 X について，現在，深澤氏および古川勝久氏（現在，東京大学）との共同研究が進行中である．これは，X が非特異の場合は，２．研究の目的欄の問題 (1)「ガウス写像が双有理的な非再帰的射影埋込みをもつこと射影多様体の分類」への部分的解を与える ことにもなる．というのは，連携研究者である深澤知氏と研究代表者の共同研究により，ガウス写像の階数が零となる射影埋込みをもつ射影多様体はガウス写像 が双有理的な非再帰的射影埋込みをもつことが示されているからである．ガウス写像の階数が零となる射影埋込みをもつための判定法として，射影多様体上の有理曲線を用いた比較的使いやすいものが得られており，それを基に，基本的な射影多様体の場合ついて研究が進

んでいる．そして，代数多様体上の有理曲線の幾何への応用も見出されている．しかし，たとえば P^N 内の 3 次超曲面について，N = 3，4 の場合に未解決な部分が残っている．N ≥ 5 次元以上の場合の射影幾何的議論を見直しさらに突き詰めて改良してゆけば，その場合も解決できると思われるが，そのためには深澤氏，古川氏との 数学的議論・研究打合せが不可欠である．また，正標数のファノ多様体の場合については，解っていないことが多い．これについては，正標数のファノ多様体についてみずから勉強することも大事であるが，正標数代数幾何の専門家たちとのセミナーや議論により，研究は大きく前進すると期待される．

(2) 2．研究の目的欄の問題 (2) 「アーベル多様体 X の射影埋め込みに応じて現れる関数体の拡大 K(X)/K(γ(X)) の決定」を目指す．まずはその準備を行いたい．具体的には，アーベル多様体上のベクトル束とフロベニウス写像の性質について知識を習得し，既存の研究で不足する部分については独自の研究を深めたい．まずはアーベル曲面の場合から始める．楕円曲線の場合の手法がある程度は，アーベル曲面に対してもそのまま適用できると思われる．アーベル曲面の場合に研究が進み，その様子が分かったらそれを足がかりに一般次元のアーベル多様体の場合について取り組む計画である．

４．研究成果

(1) グラスマン束の次数公式

ガウス写像の研究を進めるにあたって，一般ガウス写像(higher Gauss map)の研究が重要であることに気づいた．そこで研究計画を大幅に変更して，一般ガウス写像の研究を始めた．すると，そのためには，射影多様体上のベクトル束に付随するグラスマン束に関する研究が必要となった．特にグラスマン束の次数公式が重要であると判った．

そこでまずグラスマン束の次数公式について寺杣友秀氏(東大数理)と共同研究を開始した．得られた成果については，2013 年 12 月に京都大学数理解析研究所で開催されたRIMS研究集会,2014年2月にソウル(韓国)開催された研究集会, 2014 年 3 月に開催された研究集会「第 21 回沼津研究集会」,そして，2014年9月に琉球大学で開催された研究集会において招待講演を行った([学会発表⑤⑥⑦⑧])．また，成果は寺杣友秀氏との共著として学術雑誌に発表した ([雑誌論文]①)．

(2) 射影多様体の一般(higher)ガウス写像

グラスマン束の次数公式が得られたので，次に本来の目的である一般ガウス写像の研究を本格的に開始した．そして，ヴェロネーゼ多様体の一般ガウス写像の像の次数公式を得た．これは G.Boole の古典的公式 の一般化に相当する．その成果については，2015年3月に国立台湾大学で開催された研究集会, 2015 年 3 月に東京理科大で開催された研究集会において，招待講演を行った ([学会発表]③④)．成果は論文にまとめて，現在，投稿中である．

(3) 接的退化曲線の線型退化性

「ガウス写像の一般ファイバーの線形性」に関する研究から派生して得られた成果である．正標数の基礎体上で，ガウス写像の一般ファイバーが線型とはならない最初の例は，J. Rathmann (Math. Ann. 276 (1987)) と梶 (J. London Math. Soc. (2) 33 (1986)) により独立に与えられた．後者の論文の主題，つまり接線に関する trisecant lemma --接的退化曲線の線型退化性--について，射影曲線の特異点に関する条件を緩めることができ，若干ではあるが一般化することができた．研究成果については，2013 年 4 月の東北大学談話会において発表した．また，2016 年 1 月に国立台湾大学(台湾)で開催された研究集会，そして，2016 年 3 月に開催された研究集会「第 23 回沼津研究集会」において，招待講演を行った ([学会発表]①②)． また，成果は論文にまとめて学術雑誌において発表した ([雑誌発表]②)．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① <u>H.Kaji</u>, T.Terasoma, Degree formula for Grassmann bundles, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 219 (2015), 5426-5428.

② <u>H.Kaji</u>, On the tangentially degenerate curves, II, "the Kleiman-Simis volume," the Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 査読有, 45 (2014), 748-752.

〔学会発表〕（計　8　件）

① <u>梶 元</u>, A tangential trisecant lemma, 2016 年 3 月 8 日, 研究集会「第 23 回沼津研究集会」, 沼津工業高等専門学校.

② <u>梶 元</u>, A tangential trisecant lemma, Younger Generation in Algebraic Geometry and Complex Geometry IV, 2016 年 1 月 12 日, National Taiwan University (Taipei, Taiwan).

③ <u>梶 元</u>, グラスマン束の次数公式と高次ガウス写像への応用, 2015 年 3 月 17 日, 研究集会「野田代数幾何学シンポジウム」, 東京理科大学理工学部 (野田キャンパス).

④ <u>梶 元</u>, Higher Gauss maps of Veronese varieties---a generalization of

Boole's formula--- Generalized Gauss maps of projective varieties, 2015 年 3 月 6 日, "Mini-conference on Algebraic Geometry," National Taiwan University (Taipei, Taiwan).

⑤ 梶 元, グラスマン束の次数公式(続), 2014 年 9 月 29 日, 研究集会「代数多様体とその周辺」, 琉球大学理学部.

⑥ 梶 元, グラスマン束の次数公式, 2014 年 3 月 6 日, 研究集会「第 21 回沼津研究集会」, 沼津工業高等専門学校.

⑦ 梶 元, Degree formula for Grassmann bundles, 2014 年 2 月 13 日, Symposium on Projective, Algebraic Varieties and Moduli 2014 (in honor of Professor Changho Keem's 60th birthday), Seoul National University (Seoul, Korea).

⑧ 梶 元, グラスマン束の次数公式, 2013 年 12 月 17 日, 研究集会「Fano 多様体の最近の進展」, 京都大学数理解析研究所.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/

6. 研究組織
(1)研究代表者
梶 元 (KAJI, Hajime)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号:70194727

(2)研究分担者
( )

研究者番号:

(3)連携研究者
( )

研究者番号: