1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２４ 日現在

機関番号：５１２０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2018

課題番号：２５４０００５８

研究課題名（和文）非超楕円曲線からなるペンシルを持つ代数曲面に関する研究

研究課題名（英文）The research for algebraic surfaces with a pencil consisting of a non-hyperelliptic curve

研究代表者

高橋　知邦（Tomokuni, Takahashi）

一関工業高等専門学校・その他部局等・教授

研究者番号：５０２５９７９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：楕円曲線上の一般ファイバーが種数が3の非超楕円曲線であるファイブレーションの構造を持ち、その勾配が下限値をとる曲面の変形族の構成のために必要な、楕円曲線上の射影平面束の変形族の構成に関して、部分的な解決が得られた。楕円曲線上の種数が3の非超楕円曲線をファイバーとする局所的に自明なファイブレーションの構造を持つ曲面の分類につながる射影平面束の正因子に関するある種の結果を得た。一般ファイバーが種数が4階数が3の非超楕円曲線であるファイブレーションに対して、その乗法写像が全射にならないための必要条件を堀川指数に関する不等式で与えることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
複素数体上の非特異射影曲面に関する研究に関して、小平次元が1以下のものについてはその構造等についてかなりのことが知られている。一方、小平次元が2の場合、即ち、一般型の曲面については未知の部分が多く残されている。単に極小な一般型曲面という設定の下で研究をしようとすると、現れる曲面の族が膨大なものになるため、何らかの条件を付加して行うのが一般的である。我々は一般型射影曲面のうちで、非特異射影曲線上の一般ファイバーが非超楕円曲線であるようなファイブレーションの構造を持つものの構造や、変形族の構成等についていくつかの結果を得た。これは、他の一般型曲面の構造や分類にも役立つ結果であると思われる。

研究成果の概要（英文）：We got the partial results for the construction of a family of projective plane bundles over an elliptic curve, which is needed for the construction of families of algebraic surfaces with a non-hyperellptic fibration of genus 3 over an elliptic curve whose slope attains the lower bound. We got certain results for effective divisor classes of projective plane bundles over an elliptic curve which is related to the classification of surfaces with a locally trivial non-hyperelliptic fibration of genus 3 over an elliptic curve. We got the necessary condition for non-hyperelliptic fibrations of genus 4 and rank 3 so that their multiplicative map are not surjective by giving certain inequality for Horikawa index.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数曲面　ファイブレーション　勾配　堀川指数　標準写像　変形

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

非特異複素射影曲線上への正則全射でそのファイバーが連結であるようなものを持つ非特異複素射影曲面に対し、その正則全射をその曲面のファイブレーションという。ファイブレーションに対しては相対標準層の自己項点数および相対標準層のファイブレーションによる順像の次数という２つの重要な不変量が定まる。後者はファイブレーションが局所的に自明でなければ正の値をとる。前者も同じ条件下で非負値になる。

ファイブレーションのファイバーの種数を 2 以上のある値に固定し、ファイブレーションが局所的に自明でなくかつ相対的に極小、即ち、どのファイバーも第 1 種例外曲線を含まない、という条件下で、相対標準層の自己項点数を相対標準層の順像の次数で割った値をファイブレーションの勾配という。勾配には上限と下限の値があることが知られており、Xiao により、下限がファイバーの種数から 1 を引いた値の 4 倍をファイバーの種数で割った値、上限が 12 となることが証明されている。勾配が上限の 12 に等しいファイブレーションは小平ファイブレーションと呼ばれ、局所的には自明でないがファイブレーションの中に特異ファイバーが含まれないことも Xiao により得られている。また、勾配が 12 に等しい例もいくつか得られているが、ファイバー種数やファイブレーションの像の曲線の種数を任意に固定して小平ファイブレーションが存在するか、ということは未解決である。一方、勾配が下限の値をとるときは、一般ファイバーが超楕円曲線となることが今野一宏により証明されている。

今野の結果から、一般ファイバーが非超楕円曲線である場合に勾配の下限がどうなるか、ということが問題として提起されるのは当然な流れであろう。ファイバー種数が 3 の場合は堀川、Reid、Xiao により別々に勾配の下限が得られている。ファイバー種数が 4 の場合には今野と Chen によりそれぞれの方法で下限が得られている。当然ながらそれらの値はファイバー種数が 3, 4 のいずれの場合も一般ファイバーが超楕円曲線である場合よりも大きい値である。種数が 4 の場合は一般ファイバーの階数によっても下限が別々の値になることが今野・Chen により得られている。階数が 4 の場合の下限の方が階数が 3 の場合の下限よりも大きい値である。また、ファイバー種数が 5 以上の奇数で一般ファイバーのクリフォード指数が最大値となるケースについても勾配の下限が今野により得られている。また、他の曲面の分岐二重被覆として得られるファイブレーションなど様々なケースでのファイブレーションに対する勾配の下限についても多くの研究者により得られている。上記いずれの場合も勾配の値が下限に等しい例は存在することもわかっている。これに対し、ファイバー種数が 5 で一般ファイバーのゴナリティが 3 である場合の勾配に対しては、下からの評価が今野により得られているが、その不等式において等号を満たす例が存在するかは未解決である。下限はもう少し大きい値になる可能性を残している。

勾配の下限が決定されると、次に着手すべきは、勾配等式の問題、勾配が下限の値をとる曲面の構造定理・分類と変形の問題である。勾配等式は種数が 3 の場合は自明なやり方で表すことができるのだが、その場合は曲面の構造等への応用が難しいため、足利正等により、改良が試みられている。種数が 4 の場合は階数が 4 のとき、足利・吉川によるものと今野によるものの 2 通りの方法で表されている。ただし、足利・吉川のものはファイブレーションが半安定という条件の下でのものである、ということは注意しておく。また、ファイバーの種数が 4 階数が 3 のときはファイブレーションから定まる層の乗法写像が全射であるという条件下では、高橋（筆者）が求めている。ファイバー種数が 5 以上の奇数で一般ファイバーのクリフォード指数が最大値となる場合の勾配等式は今野により得られている。また、特殊なケースとして、線織面の巡回被覆として得られるファイブレーションに対する勾配等式が榎園誠により得られている。

２．研究の目的

ファイブレーションの一般ファイバーが非超楕円曲線である場合について、勾配の下限が定めっていないケースはそれを求め、既に下限が得られている場合は勾配が下限の値またはそれに近い値をとる曲面の構造定理・分類と変形族の構成をすることを目標とした。具体的に着手した問題は以下のとおりである。

勾配の下限が定まっていないのは種数が 5 以上の場合であるが、これらのケースは一般ファイバーのゴナリティやクリフォード指数によっても下限が別々に生じることが様々な結果から予想される。当初の目的はファイバー種数を任意に固定し、さらにゴナリティまたはクリフォード指数も任意に固定して勾配の下限を決定するということであった。さらに、勾配等式も得ることも目標の一つとしていた。

勾配の下限が定まっている場合についてであるが、種数が 3 の場合には、ファイブレーションの像の曲線（底曲線と呼ぶ）が楕円曲線で勾配が下限の値をとるものについては既にその構造や分類については結果を得ていたので、本研究期間内にはこれらの曲面の変形族を構成することを目標とした。そして、その準備の問題としてまずは、楕円曲線上の射影平面束の変形族の構成を解決することを目標の一つに掲げた。

種数が 4 で階数が 4 の場合も勾配が下限の場合の曲面の構造定理や分類の結果を既に得ていたので、勾配が下限に近い値をとる場合の曲面について構造・分類・変形に関する結果を得ることを試みた。

種数が 4 で階数が 3 の場合は乗法写像が全射であるという条件を外して勾配等式を得ること

を目的とした。我々の主たる対象は局所的に自明でないファイブレーションであるが、比較のためにファイバーの種数が 3 または 4 で局所的に自明である曲面についても分類等の結果を得ることも目的とした。

３．研究の方法

勾配の下限の問題については、すでに他の研究者によって得られているケースを参考に、これらの論文で用いられている方法を我々のケースに用いることができるよう改良すること、また、得られている曲面の例の構造を深く掘り下げることにより、それを一般化する、という 2 つの方法でアプローチを試みた。

ファイバーの種数が 3 の場合の変形族の構成に関しては、まず、曲面の相対標準像を含む楕円曲線上の射影平面束の変形族の構成から始めた。これは、射影平面束の正則接束のコホモロジー群の次元を求め、その結果を基にファイバー束の変換関数をパラメトライズすることにより構成するという方法をとった。この変形族は任意に固定した射影平面束の同型類に対してその周りに複素構造の異なる射影平面束が存在するような形で構成しており、最初に固定した射影平面束のまわりで完備かつ有効にパラメトライズされているようになっている。それから、堀川穎二による正則写像の変形理論を応用して曲面の変形族の構成に着手した。

種数が 4、階数が 4 のケースの曲面の構造・分類についてはその相対標準像を含む相対 2 次超曲面の構造を求め、それをベースにして調べていった。勾配が下限の値をとる場合は相対 2 次超曲面のすべてのファイバーが 2 つの有理曲線の直積と同型であり、底曲線が有理曲線の場合はその相対 2 次超曲面が 2 つのヒルツェブルフ曲面の有理曲線上のファイバー積と同型であった。また、底曲線が楕円曲線の場合も大部分は楕円曲線上の 2 つの線織面のファイバー積と同型であるが、一部そうならないものもあった。これに対し、本研究で我々が調べた曲面を含む相対 2 次超曲面は非特異 2 次曲線上の垂面を１つまたは 2 つ特異ファイバーとして含んでいる。特異ファイバーを１つのみ含む場合はその垂面の頂点において相対 2 次超曲面自身も特異点となり、ある種の双有理変換をすることにより、2 つの線織面のファイバー積に置き換えることができた。このことを利用して曲面の構造についても調べていった。一方特異ファイバーを 2 つ含む場合は相対 2 次超曲面が非特異であり、双有理変換を用いてもきれいな形に置き換えることができない。このため、3 次元の分類理論に関する結果の中から我々の研究に有用と思われるものを探して議論を進めるという方法をとった。

種数が 4 階数が 3 の場合の勾配等式は、乗法写像が全射の場合の証明を改良すること、得られている曲面の例を深く掘り下げることの 2 方向から解決を試みた。乗法写像の全射性の仮定を外すと、乗法写像の余核が現れ、その台に含まれる底曲線上の点を像とするファイバーに関して構造を調べる必要があった。我々はそのファイバーの相対標準写像による像が曲面の相対標準像の特異曲線となり、従って相対標準像が非正規であることを突き止めた。そこで、相対標準写像を曲面の正規化ととらえ、議論を進めていった。

ファイバーが種数が 3 の非超楕円曲線である局所的に自明なファイブレーションの分類に関しては、楕円曲線上の射影平面束の正因子の構造を調べることにより議論を進めていった。この議論を進めるにあたっては、ファイバーの種数を 3 には固定しなかった。即ち、ファイバーをあらゆる次数の平面曲線として、話を進めていった。これらの正因子の中には楕円曲線上の局所的に自明なファイブレーションの構造を持つものが存在し、そのような曲面は射影平面束のネロン・セヴェリ群の中の正因子の同値類からなるモノイドのある種の生成元の整数倍の代表元の中に現れることが研究の前に予想された。そこで、このモノイドの構造を調べること、射影平面束の構造から曲面の構造を調べることにより、議論を進めていった。その際有用だったのが、アティヤによる楕円曲線上のベクトル束の分類理論および小田忠雄による同種写像を用いた直既約なベクトル束の構成方法であった。

４．研究成果

勾配の下限の問題は、当初はファイバー種数が 5 以上の任意の値で考えていたが、かなりの困難を要することが研究を進めていく中で明らかになってきた。そこで、一般ファイバーの種数が 5 でゴナリティが 3 という条件に限定して進めてきたが、残念ながら研究の期間内に結果を得ることはできなかった。

種数が 3 のファイブレーションに対する変形の問題については、その準備のための楕円曲線上の射影平面束の変形に関する部分的な結果を得た。具体的にはまず、固定された楕円曲線上の射影平面束の同型類の分類を行った。次に、各同型類に対して正則接束のコホモロジー群の次元を計算した。この値はこの同型類のまわりで完備かつ有効にパラメトライズされている変形族のパラメータ空間の次元に等しい。その結果を基に、各同型類のまわりで上記の様になっている変形族を、バンドルの変換関数をパラメトライズすることにより構成した。これは各同型類に対してなされてある。ただ、一部各同型類のまわりに現れる射影平面束がどの同型類になるかが未解決のものがあり、これについて除いた形で論文にまとめた。既にジャーナルにて公表してある。今回除いたものにつては解決後、曲面の変形の結果と一緒にまとめ、公表する予定である。

種数が 4 階数が 4 の曲面の構造・分類については研究機関内には完全な結果は得られなかったが、大筋ではできているので、近いうちに論文にまとめることができると思われる。この場

合も曲面の変形族を構成するために相対２次超曲面の変形族が構成されなければならないが、現段階で一部うまく構成できていないケースがあり、そこで少し時間がかかるかもしれない。しかし、今年度中に解決し、まとめることを現在目標としている。

種数が４階数が３の曲面の勾配等式については、我々の研究機関内に他の研究者が結果を得るという事態になった。そのため、その結果を利用して同じ条件下で乗法写像が全射にならないための必要条件を得るという問題に切り替えて取り組んだ。そして、その必要条件を堀川指数に関するある種の不等式で与えることに成功し、さらに、その不等式において等式が成り立つ例を２つ挙げることにも成功した。現在論文を投稿中であり、審査結果を待っているところである。

楕円曲線上のファイバー種数が３の局所的に自明な曲面の分類については、それにつながる楕円曲線上の射影平面束の正因子の構造に関するある種の結果を得た。これについても論文にて公表している。(to appear)

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

① T. Takahashi, Projective plane bundles over an elliptic curve, Canad. Math. Bull. 61 (2018), 201-210.
② T. Takahashi, Effective divisor classes of a projective plane bundle over an elliptic curve, Rocky Mountain J. Math., to appear.

〔学会発表〕（計１件）

① Non-hyperelliptic fibrations of genus 4 containing certain degenerate fibers,
研究集会：Branched coverings, degenerations and related topics, 2016. Mar.

６．研究組織

研究代表者氏名：高橋知邦
ローマ字氏名：Tomokuni Takahashi
所属：一関高専、未来創造工学科総合科学自然科学領域