

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400059

研究課題名(和文) 射影を用いた代数超曲面の関数体の構造研究 ガロワ点理論の進化へ

研究課題名(英文) Study on function fields of algebraic hypersurfaces focusing on projections, - for an evolution of Galois point theory -

研究代表者

高橋 剛 (Takahashi, Takeshi)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：60390431

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：射影空間内の代数超曲面の関数体の構造について、ガロワ点理論の拡張となる新しい考察手法を開発することを目標に研究を行いました。射影空間内の代数超曲面の射影から得られる関数体の拡大がガロワ拡大となる時に、その射影の中心点をガロワ点と言います。

三浦敬氏(宇部高専)・深澤知氏(山形大学)と共同研究を行い、ガロワ点の一般化となる準ガロワ点というものを定義して、その基本的な性質を研究しました。また、米田二良氏(神奈川工科大学)との共同研究では、弱ガロワ・ワイエルシュトラス点というものを定義して、ガロワ点との関係について研究しました。

研究成果の概要(英文)：The purpose of my work is to develop a new method for the study on function fields of projective hypersurfaces as a generalization of Galois point theory. A point is called a Galois point if the projection from the point induces a Galois extension of function fields. It was defined by Prof. Yoshihara (Niigata Univ.) in 1996.

By the joint work with Prof. Miura (National Institute of Technology, Ube College) and Prof. Fukasawa (Yamagata Univ.), we defined the new notion "quasi-Galois point", which is a generalization of "Galois point", and have studied its fundamental properties. By the joint work with Prof. Komeda (Kanagawa Institute of Technology), we define the new notion "weak Galois Weierstrass point" and study the relations between these and Galois points.

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロワ点 ガロア点 準ガロワ点 準ガロア点 弱ガロア・ワイエルシュトラス点 弱ガロワ・ワイエルシュトラス点 自己同型群 ガロワ被覆

1. 研究開始当初の背景

吉原氏 (新潟大) は代数関数体の構造を調べる試みとして、射影平面内の非特異代数曲線に対するガロワ点という概念を導入し、その研究手法を確立した。平面代数曲線の点射影から得られる関数体の間の拡大がガロワ拡大になる場合に、射影の中心点をガロワ点という。ガロワ点について、そのガロワ群やガロワ点の個数、ガロワ点を持つ代数曲線の特徴などについて、さらにその高次元代数超曲面への拡張などといった研究が進められていた。理論のさらなる深化のために、関数体の間の拡大がガロワ拡大とならない場合に対しても、新たな研究手法の開発が求められていた。

2. 研究の目的

射影空間内の代数超曲面の関数体の構造について、ガロワ点理論の拡張となるような新しい考察手法を開発する。平面代数曲線の点射影から得られる関数体の間の拡大がガロワ拡大にならない場合に、どのようなアプローチが可能かということが本研究の主題である。

3. 研究の方法

射影空間内の非特異超曲面に対して、点中心の射影を考える。射影から得られる関数体の間の拡大がガロワ拡大にならない場合には、ガロワ閉包を考察の対象にして、以下のような研究を行う。

- (1) ガロワ閉包を関数体とする代数多様体の構成方法と自己同型について
- (2) 得られるガロワ群の種類についての検討。さらに、そのガロワ群が対称群とならないための判定条件について
- (3) 得られるガロワ群が対称群ではない射影の中心点の個数や分布について

4. 研究成果

- (1) 射影平面内の非特異5次代数曲線について、射影から得られる関数体の拡大がガロワ拡大とはならない場合の中心点について研究を行った。特に、そのガロワ群が位数8の二面体群となる場合に、そのような射影の中心点の幾何学的特徴と個数、分布について精密な結果を得ることができた。  
点中心の射影から得られる関数体の間の拡大がガロワ拡大にならない場合には、

ガロワ閉包を考察の対象にしたいわけであるが、これは一般には難しい。平面代数曲線が具体的でシンプルな方程式で与えられていたとしても、ガロワ閉包に対応する代数曲線の性質を具体的に調べることはできそうにない。しかし、位数8の二面体群が対応する射影については、5次平面曲線の位数2の自己同型が付随していることが手掛かりとなって、考察を行うことが可能となった。

この結果を論文にまとめ投稿したところ、Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padovaに掲載が決定した。本論文の内容はガロワ点理論の拡張を目指す際にはまず初めに考察すべき事柄であり、今後の研究発展に対して「はじめの一歩」となる重要なものである。

- (2) 代数曲線のガロワ・ワイエルシュトラス点と平面代数曲線のガロワ点との間の関係について、米田二良氏 (神奈川工科大学) と共同研究を行った。ガロワ・ワイエルシュトラス点の定義をヒントにして、弱ガロワ・ワイエルシュトラス点を定義した。ガロワ点を持つ平面代数曲線から弱ガロワ・ワイエルシュトラス点を持つ代数曲線が構成できることや、その逆にある種の弱ガロワ・ワイエルシュトラス点からガロワ点を持つ平面代数曲線を構成できることを示すことに成功した。さらに、代数曲線の2重被覆を経由して、ガロワ点と弱ガロワ・ワイエルシュトラス点の関係を調べることができた。  
得られた結果は論文にまとめ投稿したところ、Journal of the Korean Mathematical Societyに掲載が決定した。非特異平面代数曲線の内部ガロワ点(ワイエルシュトラス点)になることは以前からわかっていたことであるが、今回の研究により非特異平面代数曲線の内部ガロワ点をガロワ・ワイエルシュトラス点と捉えることによって完全に特徴付けることができた。ある種の弱ガロワ・ワイエルシュトラス点に対しては、ガロワ点で成立していた定理の類似も期待される。

- (3) 三浦敬氏 (宇部高専) と深澤知氏 (山形大学) との共同研究により、平面代数曲線の準ガロワ点なるものを定義し、研究を行った。準ガロワ点は吉原氏の定義したガロワ点の自然な一般化になっており、これこそが本研究課題の求めるものである。準ガロワ点に関して、その具体例、個数、現れるガロワ群、自己同型群の研究への応用などといったことについて、一般論を整理することができた。  
非特異5次平面曲線の位数8の二面体群が対応する射影の中心点の考察においては、それに付随する自己同型が考察す

る上で手掛かりとなった。同様に一般の平面代数曲線の射影に対して、なんらかの非自明自己同型が付随するような点に注目することが有益であると考え、それを準ガロワ点と定義した。

得られた結果は "Quasi-Galois points" というタイトルの論文にまとめられて、現在学術誌に投稿中である。今後さらに準ガロワ点についての研究が進み、実り多い理論となると思われるが、我々の共著論文はそれらの基礎となるはずである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

- (1) Jiryo Komeda and Takeshi Takahashi, Relating Galois points to weak Galois Weierstrass points through double coverings of curves, Journal of the Korean Mathematical Society, 掲載予定, 査読あり
- (2) Takeshi Takahashi, Projection of a nonsingular plane quintic curve and the dihedral group of order eight, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Volume 135, pp.39-61, 2016年, 査読あり
- (3) 高橋 剛, 平面代数曲線の準ガロワ点について, 射影多様体の幾何とその周辺 2015 報告集(於高知大学), pp.45-58, 2016年, 査読なし
- (4) 高橋 剛, ガロワ点とガロワワイエルシュトラス点について, 代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜報告集, pp.101-112, 2015年, 査読なし, [http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic\\_geometry\\_2014.pdf](http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2014.pdf)
- (5) 高橋 剛, ガロワ点とガロワワイエルシュトラス点について, 第12回代数曲線論シンポジウム(於日本大学)報告集, pp.43-49, 2015年, 査読なし
- (6) 高橋 剛, 非特異5次曲線の二面体群に関する点射影, 代数幾何シンポジウム 2013 in 岐阜 報告集, 高専代数幾何学研究会編, pp.31-40, 2013年, 査読なし

[学会発表](計12件)

- (1) Takeshi TAKAHASHI, Quasi-Galois points for a plane algebraic curve, 第14回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府・大阪市), 2016年3月6日
- (2) 高橋 剛, 平面代数曲線の準ガロワ点について, 射影多様体の幾何とその周辺, 高知大学朝倉キャンパス(高知県・高知市), 2015年11月1日
- (3) 高橋 剛, 準ガロワ点と応用, その1, Workshop on Galois point and related topics, 神奈川大学横浜キャンパス(神奈川県・横浜市), 2015年9月6日
- (4) 高橋 剛, Galois points, Galois Weierstrass points and double coverings of curves, 第9回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス(東京都・千代田区), 2015年5月16日
- (5) 高橋 剛, Projection of a nonsingular plane quintic curve and the dihedral group of order eight, 第13回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府・大阪市), 2015年3月6日
- (6) 高橋 剛, ガロワ点とガロワワイエルシュトラス点, 第2回代数幾何学研究集会 --宇部--, 宇部工業高等専門学校(山口県・宇部市), 2015年1月24日
- (7) 高橋 剛, Galois Points and Galois Weierstrass Points, 第12回代数曲線論シンポジウム, 日本大学理工学部駿河台校舎(東京都・千代田区), 2014年12月21日
- (8) 高橋 剛, ガロワ点と2重被覆とガロワワイエルシュトラス点, Workshop on Galois point and related topics, 滋賀大学大津サテライトプラザ(滋賀県大津市), 2014年9月13日
- (9) 高橋 剛, 非特異平面5次曲線の  $D_4$ -point の個数について, 代数幾何学小研究集会 -新潟-, 新潟大学駅南キャンパスときめいと(新潟県・新潟市), 2013年12月1日
- (10) 高橋 剛, Galois points for a plane algebraic curve, and related topics, Kobe Studio Seminar for Mathematics, 神戸大学大学院人間発達環境学研究科(兵庫県神戸市), 2013年11月8日

(11) 高橋 剛, 非特異平面 5 次曲線の二面体群に関する点射影について, Workshop on Galois point and related topics, 山形大学(山形県山形市), 2013 年 9 月 14 日

(12) 高橋 剛, 非特異平面 5 次曲線の二面体群に関する点射影, 代数幾何シンポジウム 2013 in 岐阜 -数学教育の話題もあります.-, ソフトピアジャパンセンタービル(岐阜県大垣市), 2013 年 8 月 9 日

[その他]

(1) プレプリント(1 件)

Satoru Fukasawa, Kei Miura and Takeshi Takahashi, Quasi-Galois points, 投稿中,  
<http://arxiv.org/abs/1505.00148>

(2) ワークショップ・研究集会の開催(5 件)

Workshop on Galois point and related topics, 神奈川大学横浜キャンパス, 2015 年 9 月 5 日~9 月 6 日, 世話人: 三浦敬(宇部高専), 高橋剛(新潟大学), 深澤知(山形大学), 本間正明(神奈川大学)

代数小研究集会 in 新潟, 新潟大学, 2015 年 6 月 6 日~6 月 7 日, 世話人: 北川真也(岐阜高専), 三浦敬(宇部高専), 林田秀一(上越教育大), 高橋剛(新潟大学)

Workshop on Galois point and related topics, 滋賀大学大津サテライトプラザ, 2014 年 9 月 13 日~9 月 15 日, 世話人: 三浦敬(宇部高専), 高橋剛(新潟大学), 長谷川武博(滋賀大学), 深澤知(山形大学)

代数幾何学小研究集会 -新潟-, 新潟大学駅南キャンパスときめいと, 2013 年 11 月 30 日~12 月 1 日, 世話人: 小島秀雄(新潟大学), 三浦敬(宇部高専), 高橋剛(長岡高専)

Workshop on Galois point and related topics, 山形大学, 2013 年 9 月 14 日~9 月 15 日, 世話人: 三浦敬(宇部高専), 高橋剛(長岡高専), 深澤知(山形大学)

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 剛 (TAKAHASHI, Takeshi)  
新潟大学・自然科学系・准教授  
研究者番号: 60390431

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

吉原 久夫 (YOSHIHARA, Hisao)  
新潟大学・自然科学系・名誉教授  
研究者番号: 60114807

大淵 朗 (OHBUCHI, Akira)  
徳島大学・大学院ソシオアーツアンドサイエンス研究部・教授  
研究者番号: 10211111

三浦 敬 (MIURA, Kei)  
宇部工業高等専門学校・一般科・准教授  
研究者番号: 50353321