様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００６２

研究課題名（和文）平均曲率一定曲面論の新展開

研究課題名（英文）A new development of constant mean curvature surfaces

研究代表者
剱持　勝衛（Kenmotsu, Katsuei）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・名誉教授

研究者番号：６０００４４０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：複素２次元の非平坦複素空間形内の平均曲率ベクトル場が平行な曲面は一般に一つの調和関数と５個の実定数で定まることを示した。証明のポイントは曲面のケーラー角度関数が定数でないとき、この関数を曲面の座標の一つとして取ると、はめ込みの全ての情報がケーラー角度関数で書き下せるところである。更に、これらの結果を使うとケーラー角度関数がある調和関数の積分変換であることも証明できた。応用として、曲面がトーラスに位相同型である場合をしらべ、そのようなはめ込みは全実型であることを証明した。　これによりトーラス型の平行平均曲率曲面が完全に分類できた。

研究成果の概要（英文）：We proved that a parallel mean curvature surface in the non-flat complex space form of complex two dimension, in general, depends on one harmonic function and five real constants. It is the point for the proof to use the Kaehler angle function as one of the coordinates of the surface. In fact, the first and second fundamental forms of the surface can be written in terms of the Kaehler angle function. Moreover, it is proved that the Kaehler angle function is given as an integral transformation of a harmonic function on the surface. Applying these results to the case that the surface is homeomorphic to a torus, we proved that the immersion must be totally real, and hence we determined those tori explicitly.

研究分野：微分幾何学

キーワード：平行平均曲率ベクトル場　複素空間形　平均曲率一定曲面

１．研究開始当初の背景

3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面は小域的には、複素解析的関数（一定平均曲率がゼロの場合）、やサイン・ゴールドン方程式の解（一定平均曲率がゼロでない場合）で定まることは良く知られている。3 次元ユークリッド空間内の平均曲率が恒等的にゼロである曲面は極小曲面と呼ばれその大域的研究に関して膨大な研究の蓄積がある。より一般に平均曲率がゼロでなく一定である曲面の大域的研究は 1984 年 H. Wente により非自明なトーラス型曲面が発見されてから研究が盛んになった。はめ込みの余次元が 2 以上のとき、実 2 次元極小曲面は調和写像論と密接に関係することから多くの美しい結果がある。余次元２に限定すると極小はめ込みの場合はさらに詳しく研究されている（例えば J. Chen and G. Tian, “Minimal surfaces in Riemannian 4-manifolds”, GAFA 7(1986), 873-916). 特にはめ込みが一定ガウス曲率を許容するとき本代表者と増田久弥氏との共同研究(J. Reine Angew. Math., 523(2000), 69-101) により完全な分類がなされている。しかしながら、極小曲面の一般化である「平均曲率ベクトルがゼロでなく平行」な曲面は実空間形内では知られている曲面族に限ることが示されているので新しい曲面は現れない。これは 1970 年代初めに B. Y. Chen, S. T. Yau, D. Hoffman によって独立に証明された。実空間形を複素空間形に替えると異なる様相が現れる。複素空間形内の実２次元平均曲率ベクトル平行な曲面でケーラー角度関数が定数でない場合を最初に研究したのは尾方（Kodai Math. Jour. 18(1995), 397-407) で, ついで研究代表者と Zhou との共同研究（Amer. Jour, Math. 122(2000), 295-317)がある。最近では D. Fetcu による研究(J.Diff.Geo. 91(2012), 215-232)がある。その論文で Fetcu は多くの必要条件を発見しているが, 存在定理は示していない。尾方の先駆的研究、研究代表者と Zhou、平川らの先行研究により第二基本形式にある条件を課した場合の曲面の分類が成されていた。条件つきでも実空間形の場合と異なり、新しい興味深い曲面が発見されたことは注目に値する。実際、正則断面曲率 $4\boldsymbol{\rho}$ をもつ複素２次元複素空間形を $M^*(4\boldsymbol{\rho})$、実２次元リーマン多様体を M とし、$x : M \longrightarrow M^*(4\boldsymbol{\rho})$ を平均曲率ベクトル H が平行なはめ込みとし、$\boldsymbol{\alpha}$ をそのケーラー角度関数とする。余次元２であることから、はめ込み x の第二基本形式は２つの複素数値関数 a, c で定まる。a が実数値関数となるときのはめ込みは尾方や研究代表者と Zhou との共同研究により分類が終了している。a が実数値関数でない曲面を一般型と呼ぶことにする．平川はガウス曲率一定の追加条件のもとで一般型曲面を調べ(Hirakawa, Geom. Dedicata, 118(2006), 229-244) 、ポアンカレ平面から複素双曲平面 $CH2$ への等長的埋入を発見した。研究代表者はガウス曲率一定の仮定なしで、一般型の曲面をしらべ次を得た：$\boldsymbol{\rho} \neq 0$ とし、ケーラー角度関数 ***αが定数でないとする。このとき、*** a は $\boldsymbol{\alpha}$ の関数であることを数式処理プログラムで確かめた。更に、ケーラー角度関数 $\boldsymbol{\alpha}$ はある調和関数の積分変換で得られる。

この事実をコンピューターなしで、純粋数学の定理としての証明を得ることが次の問題として残された。

２．研究の目的

（１）複素空間形内余次元２の一般型平行平均曲率ベクトル曲面の第一、第二基本形式を決定し、それができたら、逆にこれらの情報から一般型曲面の存在定理を示す。そして、その結果を論文として公表したい。

（２）複素射影平面 や複素双曲的平面内の平均曲率ベクトル平行で球面に位相同形な曲面は既に決定されている(D. Fetcu, 2012) ので、次の問題としてトーラスに位相同形な曲面を研究する。ケーラー角度関数 ***αがゼロでない*** 場合は前年度までの研究代表者による結果を使って研究できる。残された問題はケーラー角度関数がゼロとなる点の近傍での解析であるが，これを知られている正則２微分の係数が定数になることを用いて行い，ウエンテトーラスの一般化を得る．

（３）次に余次元が２より大きいとき、ブラジルの Tribuzy 教授と行っている共同研究を完成させたい。Tribuzy との間でこれまでに行った共同研究のうちで、余次元の退化に関する部分を彼は M. Ferreira との共同研究で外側の空間をより一般な対称空間に対して証明した． 存在定理を得るために、特別な法ベクトル場を見つけ、それに関するはめ込みの全微分方程式を解く。

（４）次に平均曲率一定曲面に対するワイエルシュトラウス－剱持の表現公式（参考 剱持 勝衛 ”曲面論講義 ”p.104 培風館 2000）を我々の一般型曲面に一般化する。これは研究代表者の得た第一，第二基本形式がケーラー角度関数を用いて具体的に書きくだされているので，十分に研究可能である．

（５）$R3$ 内のデローネー回転面は完備な平均曲率一定曲面の具体例として重要であるが、本研究代表者のこれまでの研究成果や Dorfmeister との回転超曲面に関する共同研究を応用して、$CP2, CH2$ 内の回転面を決定する。

３．研究の方法

（１） これまでに得られた数式処理プログラムとコンピューターを使って得られた結果を純粋数学としての定理にするために、計算の簡略化を行う。曲面論の基本定理によれば、このような曲面は一般に第一基本形式と第２基本形式の２階までの共変微分で定まるので、曲面を定義している写像の４階までの偏微分係数を決定する作業であるが、昨年

までの研究では余次元２であることから、本研究に現れる偏微分方程式は過剰決定系であり、得られた条件から曲面として存在しうる第一、第二基本形式を具体的に抽出する。

（２）次に、ケーラー角度関数のゼロ点の近傍を楕円型偏微分方程式論で解析する。この結果と研究代表者のこれまでの研究成果を使い、ウエンテトーラスの一般化を得る．具体的には、知られている２種類の正則２次微分に研究代表者の得た局所構造定理を応用する。リーマン・ロッホの定理により種数１であることから、これらの正則２次微分の係数は局所定数である。その係数は曲面の等温パラメーターと第二基本形式で記述されるが、これらの係数は研究代表者によるこれまでの研究によりある調和関数のある関数変換で書き表されるので、有効な情報が得られてウエンテトーラスの一般化が得られる。

（３）余次元が２より大きいとき、ブラジルの Tribuzy 教授と行っている共同研究を完成させたい。興味深い曲面を求めるためには、はめ込みの微分方程式をできるだけ簡単にすることが重要である。そのために特別な法ベクトル場を探すことが重要で、我々はその候補となるいくつかの法ベクトル場を既に発見している。実際、余次元が２より大なので平均曲率ベクトルと直交する法ベクトルから特別な性質をもつ法ベクトルをさがすことは非自明である。これを我々は外側の空間の概複素構造を使って発見した。今年度は Tribuzy と本研究代表者が見つけた法ベクトル場を使って、実際に第１、第２基本形式を書き下し、それからえられる微分方程式系を解いて、興味ある曲面を構成する。

（４） 余次元２の一般型曲面に対し、$R3$ 内の極小曲面のワイエルシュトラウス表現定理や平均曲率一定曲面の表現公式（剱持　勝衛　”曲面論講義”p.104、培風館）の拡張をこれまでに得られた成果を応用して得る。

４．研究成果

研究目的欄に記載した項目に従って得られた成果を述べる。非平坦複素空間形内の一般型平行平均曲率曲面に対して、次の成果が得られた：

（１）基本補題　ケーラー角度関数αが定数でないと仮定する。そのとき、複素数値関数 a はケーラー角度関数αの関数となり、a はαについて１階の非線形複素常微分方程式を満たす。従って、a は２つの実定数で定まる。

　この補題で外側の空間が非平坦であるという仮定は本質的である。実際、それはａの共変微分 a’が消えてないことを主張するのに使われる。次に構造方程式より a’がαと a で具体的に記述できることを示すところが証明のポイントである。

（２）ｃはａと第一基本形式と一つの実定数から具体的に定まる。実際、c がゼロでないならば、log c の全微分がαと a で具体的に記述できることを証明する。

　ケーラー角度関数が楕円型の偏微分方程式を満たすことは知られていたが、我々の場合、基本補題(1)を使うと、その偏微分方程式を具体的に解くことができた。得られた解の形から、

(3)「非定数なケーラー角度関数αはある実数値調和関数を積分変換して得られる」ことがわかる。

　基本補題(1)は本研究代表者により数年前に数式処理ソフトを使って、非常に長い計算のあとで得られていたが、今回、その証明を手計算で行うことができるように簡略化して論文作成・公表が可能となったものである。これらの補題を使うと、

(4) 定理 1.　 ケーラー角度関数αが定数でないと仮定する。そのとき、非平坦複素空間形内の一般型平行平均曲率曲面は一つの調和関数と５個の実数により定まる

を得る。定理１の応用として、次の存在定理を得た。

(5) 定理２．ゼロでない実数ρ、正数ｂと２次元平面内の単連結領域Ｄ上の調和関数ｆを与えると、Ｄから複素２次元複素空間形 M*(4ρ)への平行平均曲率はめ込みｘが存在して、**x** の平均曲率ベクトルの長さ=2b,**x** のケーラー角度関数はｆにより定まる。

以上の結果は論文として 2016 年４月に American Journal of Mathematics 誌から発表された。

ケーラー角度関数αが定数であるときの研究と一般型でないときの曲面の分類は既に知られているので、まとめると、「非平坦な複素２次元複素空間形内の平行平均曲率ベクトル曲面全体は局所的には３種類の曲面族に分けられ、そのうちの２つはガウス曲率が一定で他の一つ（今回発見された曲面族）は負のガウス曲率をもち、複素双曲的平面内のみに存在する」ことが示された。

(6)　この分野の先駆的研究である尾方の論文の誤りを修正した。実際、ある幾何学的条件を提示し、その条件のもとで、尾方の使用した等温パラメーターが存在することを示した。そして、そこで使われた研究手法を一般化して、次の結果を得た。

(7) ケーラー角度関数αが定数でないと仮定する。そのとき、ある等温座標系が存在して、その等温パラメーターはケーラー角度関数αの関数となり、更にｃ の具体的表示が得られる。

(8) 平行平均曲率曲面には２つの正則２次微分が存在することが知られているが、研究代表者の発見した特別な座標系ではそれらの２次微分の係数がどちらも定数になることが証明された。この結果より、

(9) もしａ が実数値関数でないときは、**ρ<0** となり、更に **a** は **sinα** と一つの実定数で具体的に書き下せる。

これを先に述べた曲面の分類定理に応用して次の定理が得られる。

(10) 定理 3．M を非平坦複素２次元複素空間形内の平行平均曲率トーラスとする。そのとき、M は平坦ではめ込みは全実型となる。
この定理の証明のポイントは一般型のトーラスは存在しないことを示すところである。そのために、(9)よりガウス曲率が負の定数で上から評価されることを使う。
大仁田の定理と上の定理 3 から、複素射影平面と複素双曲的平面内の平行平均曲率トーラスが具体的に分類された。以上の研究成果を論文にまとめ、現在ある雑誌に投稿中である。
(11) 余次元が３以上の場合については、進展があまりなかった。それは余次元２の場合の局所構造定理の精密化とその結果を使って、トーラスの場合を調べて論文制作に時間を取られたためである。
(12) CP2 や CH2 内の回転曲面の研究のために、準備としてユークリッド空間内の一般型回転超曲面で平均曲率が一定とは限らない場合を長澤と共同研究した。与えられた連続関数に対し、それを平均曲率関数として許容する一般型超曲面が局所的に存在することは知られているが、我々はその超曲面を最初に与えた連続関数の定義域まで一意的に拡張できることをバナッハの不動点定理を使って証明した。この結果は２次元の場合は研究代表者により、また高次元で実解析的の場合は Dorfmeister との共同研究で証明されていた結果の拡張である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計 3 件）
① K. Kenmotsu, Correction to “The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms”, American Journal of Mathematics, 査読有、138(2016),395-402, http://www.math.jhu.edu/~ajm/
② K. Kenmotsu and T. Ogata, Correction to “Surfaces with parallel mean curvature vector in P2C”, Kodai Mathematical J, 査読有、
38(2015),687-689,
http://projecteuclid.org/euclid.kmj
③ K. Kenmotsu and T. Nagasawa, Global existence of generalized rotational hypesurfaces with prescribed mean curvature in Euclidean spaces I, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有 67(2015), 1077-1108,
DOI 10.2969/jmsj/06731077

〔学会発表〕（計 10 件）
① 剱持勝衛 Parallel mean curvature surfaces, 2016 年 2 月 18 日、MORITO One-Day Meeting on Differential Geometry and Integrable Systems, 東京理科大学神楽坂キャンパス（東京）
② 剱持勝衛 Parallel mean curvature surfaces, International workshop on geometry of Riemannian and Hermitian manifolds, 2015年12月07日, ソフィア(ブルガリア)
③ 剱持勝衛 複素空間形内の平行平均曲率曲面、続 日本数学会 2015 年度年会 一般講演、2015 年 3 月 21 日, 明治大学（東京）
④ 剱持勝衛 **Harmonic functions and parallel mean curvature surfaces, 2014 ICM satelite Confernece on Real and Complex Submanifolds, NIMS,** 2015 年 8 月 11 日、Daejeon（韓国）
⑤ 剱持勝衛 **Harmonic functions and parallel mean curvature surfaces, Workshop "Transformations and Singularities",** 2014 年 9 月 17 日、ウイーン（オーストリア）
⑥ 剱持勝衛 **A direct proof of Delaunay's Theorem and its generalization,** 第 8 回大阪市立大学数学研究所ー慶北国立大学 GRG 共催 微分幾何学ワークショップ 2014 年 4 月 15 日、大阪市立大学（大阪）
⑦剱持勝衛 **Global existence of rotational hypersurfaces with prescribed mean curvature,** Conference on Geometry, Galatasaray University, 2014 年 3 月 21 日 イスタンブール（トルコ）
⑧ 剱持勝衛 一般型平行平均曲率一定曲面、研究集会「部分多様体論湯沢 2013」, 2013 年 11 月 23 日 越後湯沢町（新潟県）

〔図書〕（計 1 件）
① **Y.J.Suh, J.Berndt, Y.Ohnita, B.H.Kim, H.Lee(editors), Springer 社, “Real and Complex Submanifolds”, Springer PROMS, vol.106, 2014, 13-19** ページ

〔産業財産権〕
なし

〔その他〕
ホームページ：
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
剱持 勝衛 （KENMOTSU KATSUEI）
東北大学・理学研究科・名誉教授
研究者番号：60004404

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし