

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400063

研究課題名(和文) 正則写像から受け継がれる超共形写像の性質とその応用

研究課題名(英文) Property of super-conformal maps inherited from holomorphic maps and its application

研究代表者

守屋 克洋 (MORIYA, Katsuhiko)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：50322011

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：正則関数は平面内の図形の角度を変えないで平面内の図形に移す。これをして正則関数は共形であるという。正則関数は数学的に良い性質を持つ。平面内の図形をより次元の高い空間に共形に移すとき、その写像は同様に良い性質を持つことが期待出来る。このことを最もよく実現するのが四次元ユークリッド空間への超共形写像であると推測して性質を調べた。その結果、シュワルツの補題の超共形写像版など、正則関数でよく知られていた定理の超共形写像版ができた。これらの性質は超共形写像に付随するツイスター空間への写像を経由して得られる。共形写像について、ツイスター空間への写像との関連を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：A holomorphic function relates a figure in the plane to a figure in the plane without changing the angle. This is said that a holomorphic function is conformal. A holomorphic function has mathematically good properties. If a map relates a figure in the plane to a figure in a higher dimensional space, it can be expected that the map has similarly good properties. We speculated that the best realization of this is a super-conformal map to the four dimensional Euclidean space. As a result, a super-conformal map version of a well-known theorem of a holomorphic function such as a super-conformal map version of Schwarz's lemma was proved. These properties are obtained via maps to the twistor space associated with a super-conformal map. We revealed the relation between conformal maps and the maps to the twistor space.

研究分野：曲面の微分幾何学

キーワード：曲面 共形写像 超共形写像 極小曲面 ツイスター空間 四元数的正則幾何 曲面の変換 可積分系

### 1. 研究開始当初の背景

リーマン面から 4 次元共形球面  $S^4$  への超共形写像とは、ウィルモア・エネルギーが零である共形写像である。 $S^4$  を四元数的射影直線で実現し、そのツイスター空間へのリーマン面からの正則写像とツイスター射影の合成写像が超共形写像となる。

共形写像のウィルモア・エネルギーは、 $S^4$  の共形変換で不変な量である。よって超共形写像は共形幾何の研究対象である。ウィルモア・エネルギーが零であるからウィルモア曲面である。 $S^4$  の立体射影は共形写像である。よって、リーマン面から  $R^4$  へのウィルモア・エネルギーが零の共形写像は、 $S^4$  への超共形写像と立体射影の合成である。これも超共形写像とよぶ。Boruvka 曲面, Wintgen ideal 曲面ともよばれる。

これらは長い歴史をもつ研究課題であり、最近の研究結果としては、 $C^2$  内の超共形ラグランジュ球面の決定、ガウス曲率と法曲率の絶対値が等しい超共形写像の分類、複素正則零曲線とのダルブー変換による対応などがある。

二次元共形球面  $S^2$  を  $S^4$  内で実現し、これと複素射影直線を同一視するとき、リーマン面から複素射影直線への超共形写像は正則写像と反正則写像である。これより、超共形写像は、リーマン面から複素射影直線への正則写像と反正則写像の、共形幾何学における高次元版であると考えられる。リーマン面から複素射影直線への正則写像と  $S^2$  から複素平面への立体射影を合成するとリーマン面上の正則関数もしくは有理型関数が得られる。したがって、四次元球面を四元数的射影直線で実現し、リーマン面から  $S^4$  への超共形写像と  $S^4$  から四元数への立体射影の合成写像は、リーマン面上の正則関数もしくは有理型関数の性質と、類似した性質をもつと予想される。

そこで、超共形写像を  $C^2$  への正則写像と四元数への共形写像の四元数の積でとあらわした。これを用いて、正則関数と有理型関数についての Schwarz の補題, Schwarz-Pick 定理, Weierstrass 分解定理, Abel-Jacobi 定理にたいして、超共形写像版の定理を構築した

### 2. 研究の目的

本研究では、継続研究として、正則関数と有理型関数についての定理にたいして、超共形写像版の定理を構築できるかどうかという問題を研究する。さらに派生研究として、得られた定理と(1) 超共形写像の変換、(2) 超共形写像と対応する平坦接続の族、との関係を研究する。また、(1) 古典的な曲面で超共形であるもの、(2) 超共形写像の高次元版となる高い次元の多様体間の写像、について、同じ問題を研究する。

### 3. 研究の方法

研究分担者として塚田和美、長谷川和志、

大仁田義裕、研究協力者として、Katrin Leschke からなる研究組織を作り、塚田和美から四元数的射影空間内の部分多様体、長谷川和志からは曲面のツイスターリフト、Katrin Leschke から四元数的正則幾何についての知見の提供を受け研究を進めた。

2014 年度と 2016 年度に全体でのミーティングを行って研究方針を立てたほか、Katrin Leschke と毎年度一回の割合で、長谷川和志とは毎年度複数回のミーティングを行って研究を進めた。得られた結果は日本数学会の年会や秋季総合分科会などで発表し、フィードバックによりさらなる研究情報を収集した。

### 4. 研究成果

(1) 得られていた、超共形写像の分解定理を用いた正則関数と有理型関数についての Schwarz の補題, Schwarz-Pick 定理, Weierstrass 分解定理, Abel-Jacobi 定理の超共形写像版をベクトル束とその切断を用いてアップデートした。これにより、非専門家によりアクセスしやすい内容となり国際専門誌に掲載された。さらにそれをアップデートしたものを国際研究会で発表し、その内容が研究会紀要に掲載予定である。(2) 超共形写像がツイスター空間にリフトを持つことを、四元数的正則幾何を用いて長谷川和志と詳細に調べることにより、共形写像に標準的なツイスターリフトが構成されて、超共形写像に付随する正則リフトはこのリフトの特別な場合であること、他の共形写像の性質もこのリフトの性質で説明できることを示した。この結果は国際専門誌に掲載された。この研究は余次元が高い曲面へと継続している。(3) 超共形写像は等温曲面の意味で極小曲面とクリストッフェル双対である。このことを、Katrin Leschke と四元数的正則幾何を用いて詳細に調べ、極小曲面の変換であるシンプル・ファクター・ドレッシングで説明し、その他の変換のこともまとめてプレプリントにまとめ arXiv にポストした。このプレプリントは極小曲面の国際的リーディンググループであるグラナダの研究グループに注目されることとなり、Leschke がグラナダ大のセミナーで二回説明することとなった。この研究は余次元が高い曲面へと継続している。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7件)

1. K. Moriya, The Schwarz lemma for super-conformal maps, Hermitian-Grassman manifold, 印刷中. 査読有
2. K. Leschke and K. Moriya, Applications of Quaternionic Holomorphic Geometry to minimal surfaces, Complex Manifolds 3,

- (1)(2016). 査読有  
doi:10.1515/coma-2016-0015
3. Hasegawa, K. and Moriya, K., Twistor Lifts and Factorization for Conformal Maps from a Surface to the Euclidean Four-space, *Adv. Appl. Clifford Algebras* (2016). 査読有  
doi:10.1007/s00006-016-0728-0
4. Kazumi Tsukada, Totally complex submanifolds of a complex Grassman manifold of 2-planes, *Differential geometry and its applications* 44 (2016), 30-51 . 査読有  
doi:10.1016/j.diffgeo.2015.10.003
5. Moriya, Katsuhiro, A factorization of a super-conformal map, *Israel J. Math.* 207, (1), 331-359 (2015). 査読有  
doi:10.1007/s11856-015-1176-6
6. Kazuyuki Hasegawa, The first Chern class and conformal area for a twistor holomorphic immersion, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 84, 67-83 (2014). 査読有  
doi:10.1007/s12188-014-0089-3
7.  
〔学会発表〕(計 2 1 件)
1. 長谷川和志, 四元数多様体への包含的はめこみとその不変量, 研究集会「部分多様体の幾何学とその発展」～阿部直人先生退職記念研究会～, 2017年3月7日, 東京理科大学森戸記念館(東京都・新宿区)
2. 守屋克洋, The Weierstrass representation for surfaces in Euclidean space of arbitrary dimension, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会幾何学分科会, 2016年9月17日, 関西大学(大阪府・吹田市)
3. 長谷川和志, A quaternionic Willmore immersion, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会幾何学分科会, 2016年9月17日, 関西大学(大阪府・吹田市)
4. 長谷川和志, A quaternionic invariant for an inclusive immersion, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会幾何学分科会, 2016年9月17日, 関西大学(大阪府・吹田市)
5. Kazuyuki Hasegawa, An inclusive immersion in a quaternionic manifold and its invariants, *Quaternionic differential geometry and related topics*, 2016年9月8日, お茶の水女子大学(東京都・文京区)
6. 長谷川和志, 四元数多様体への包含的はめこみとその不変量, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2016」, 2016年9月2日
7. Katsuhiro Moriya, The Schwarz lemma for super-conformal maps, *The 20<sup>th</sup> International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds*, 2016年7月28日, 大邱(韓国)
8. Kazuyuki Hasegawa, Twistor lifts and

- factorization for conformal maps of a surface, *The 20<sup>th</sup> International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds*, 2016年7月28日, 大邱(韓国)
9. Katrin Leschke, Quaternionic holomorphic geometry, *The 4<sup>th</sup> Workshop "Complex Geometry and Lie Groups"*, 2016年3月25日, 奈良女子大学(奈良県・奈良市)
10. Katsuhiro Moriya, Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface, *The 4<sup>th</sup> Workshop "Complex Geometry and Lie Groups"*, 2016年3月25日, 奈良女子大学(奈良県・奈良市)
11. 守屋克洋, The Schwarz-Pick theorem for super-conformal maps, 日本数学会 2016年度年会幾何学分科会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県・つくば市)
12. 守屋克洋, Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface II, 日本数学会 2016年度年会幾何学分科会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県・つくば市)
13. 長谷川和志, Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface I, 日本数学会 2016年度年会幾何学分科会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県・つくば市)
14. 塚田和美, Transversally complex submanifolds of a quaternionic projective space, 内藤博夫先生退職記念研究会, 2016年3月6日, 山口大学(山口県・山口市)
15. Katsuhiro Moriya, Transforms of minimal surfaces and harmonic maps, *OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems*, 2016年2月15日, おお阪市立大学(大阪府・大阪市)
16. 長谷川和志, ツイスター正則なアフィン曲面と射影不変量, 第 62 回幾何学シンポジウム, 2015年8月27日, 東京理科大学(東京都・千代田区)
17. 長谷川和志, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, 日本数学会 2015年度年会幾何学分科会, 2015年3月21日, 明治大学(東京都・千代田区)
18. 守屋克洋, 極小曲面のシンプル・ファクター・ドレッシング, 日本数学会 2015年度年会幾何学分科会, 2015年3月21日, 明治大学(東京都・千代田区)
19. 塚田和美, Totally complex submanifold of a complex Grassman manifold of 2-planes, 日本数学会 2014年度秋季総合分科会幾何学分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島県・東広島市)
20. 長谷川和志, ツイスター正則なアフィン曲面について, 統計多様体の幾何学とその周辺, 2015年3月9日, 北海道大学(北海道・札幌市)

21. 長谷川和志, ツイスターリフトを持つ  
アファインはめこみに対する種々の射影不  
変量, 統計多様体の幾何学とその周辺, 2015  
年3月9日, 北海道大学(北海道・札幌市)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

Quaternionic Complex Differential  
Geometry

<https://sites.google.com/site/qcdgrg/>

m:iv

<http://www2.le.ac.uk/projects/miv>

Minimal surfaces and integrable systems

<https://www.researchgate.net/project/Minimal-surfaces-and-integrable-systems>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

守屋 克洋 (MORIYA Katsuhiko)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号: 50322011

### (2) 研究分担者

長谷川 和志 (HASEGAWA Kazuyuki)

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号: 50349825

塚田 和美 (TSUKADA Kazumi)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創生科  
学研究科・教授

研究者番号: 30163760

(平成25年度～平成27年度)

大仁田 義裕 (OHNITA Yoshihiro)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創生科  
学研究科・教授

研究者番号: 90183764

(平成25年度～平成27年度)

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

### (4) 研究協力者

カトリン レシュケ (Katrin LESCHKE)

University of Leicester・Department of  
Mathematics・Reader