

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400064

研究課題名(和文) 閉リーマン面の退化族に関する複素2次元特異点の研究

研究課題名(英文) Research of normal surface singularities related to degeneration families of compact Riemann surfaces.

研究代表者

都丸 正 (Tomaru, Tadashi)

群馬大学・保健学研究科・教授

研究者番号：70132579

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：複素2次元特異点の極大イデアルサイクルと基本サイクルに関する研究を行った。これらの対象は、「閉リーマン面の退化族」と「複素2次元特異点」の関係について研究を行う際に重要なものである。泊昌孝との共同研究で複素乗法群作用付きの複素2次元特異点について、極大イデアルサイクルと基本サイクルが一致するための条件を調べ、この成果はTohoku Math. Journalに投稿し掲載受理されている。

その後、複素2次元特異点の極大イデアルの特異点解消空間への引き上げの埋め込み点と、特異点自体のPencil種数との関係について研究を行い、種々の研究会等で発表し、現在論文を準備している。

研究成果の概要(英文)：We have been researching the relation between the maximal ideal cycle and the fundamental cycle for normal surface singularities. These cycles are important when we consider the relation between degeneration families of compact Riemann surfaces and surface singularities. For the result above, I wrote a paper with Masataka Tomari and we submitted it Tohoku Math. J. and it was accepted in September of 2015. Recently, I have been researching of embedded points of the pull-backs of maximal ideals of normal surface singularities. Also, I studied the relation between it and pencil genus. I presented several times those results at symposiums and conferences. Now I am preparing to write a paper on it.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：複素2次元特異点 極大イデアルサイクル 基本サイクル 閉リーマン面の退化族 特異点解消空間

1. 研究開始当初の背景

複素 2 次元特異点論は 1970 年代より現在に至るまで活発に研究されてきた。一方、閉リーマン面の退化族は、1966 年に小平邦彦 (日本人初のフィールズ賞受賞者) による楕円曲面論において明確に定義が与えられたものである。特異点と退化族、この両者については、特異点の解消空間と、退化族の特異ファイバーの近傍に多くの類似が見られる。

そうした中で、1977 年に、力学系の大家である V.I. Arnold により分類されたある種の特異点の族と、小平により分類された楕円曲線の退化族が密接に関係することが、V. Kulikov と M. Reid により発見され、これが契機となり、U. Karras により代数曲線の退化族に最も近いクラスの特異点として、Kodaira 特異点の定義が与えられた。

申請者は、Kodaira 特異点とは限らない全ての複素 2 次元特異点が、その特異点解消空間が代数曲線の退化族に自然に埋め込めることを証明し、これに基づき、Pencil 種数という特異点の不変量を定義した。これは、特異点と退化族の距離を測る量である。

なお、この問題は 2 次元特有のものではなく、 $n+1$ 次元特異点と n 次元代数多様体の退化族との比較という、3 次元以上ではどうかという問題を引き起こすことを注意しておく。

(1) 複素 2 次元特異点と閉リーマン面の退化族との類似を考える上で、その重要な特性の一つとして極大イデアルサイクルと基本サイクルとの一致がある。研究開始の問題意識に、それら両サイクルの一致が、一般の特異点でいつ成り立つかを調べることがあった。これらについては、今野 長島、Meng - 奥間によりそれぞれ、Brieskorn 型超曲面特異点と Brieskorn 型完全交叉特異点の場合に決定されている。

(2) さらに、極大イデアルの特異点解消空間への引き上げに生じる埋め込み点の考察がある。特異点の極大イデアルの引き上げの埋め込み点については、1970 年に P. Wagreich により、A. Grothendieck 理論に基づき一般論が展開されていたが、具体的特異点について、どのような形で埋め込み点が生じるかは、あまり明確になっていない。これをよく知られた特異点について調べることは重要な問題である。これは次の(3)と深く関わる問題である。

(3) 複素 2 次元特異点と閉リーマン面の退化族の距離を計ることを意図して、申請者により 15 年ほど前に導入された複素 2 次元特異点の不変量に Pencil 種数がある。これは、特異点とそれ上の正則関数との対に対しての Pencil 種数と、特異点それ自体の Pencil 種数と二種あるが、後者は前者の極小値であ

る。一般に、特異点を与えたとき、前者は特異点自体が単純な場合は明確に分かるが、後者については、その決定には微妙なものがあり、Kodaira 特異点のような場合を除くと、ほとんど手つかずといえる。なお、Kodaira 特異点の場合は、Pencil 種数は基本種数 (基本サイクルの算術種数) と一致する。

(4) 複素 2 次元特異点の系列を考えることは、特異点論において意味のあることである。幾何学的対象の分類では、一般的に位相同型を最も粗い分類として考えるが、特異点においては、それでも細か過ぎることが知られている。そのような中で、特異点系列は意味あるものと言えよう。よく知られたものとしては、有理 2 重点の A_n, D_n 型特異点の系列がある。1980 年に S.S.T. Yau は楕円型特異点について、楕円系列と呼ばれる特異点系列を定義して、この系列の長さで幾何種数の上限が与えられることを示した。この結果は、Brieskorn 型超曲面特異点について、申請者により類似の結果が示されている。また、今野一宏は一般の算術的 Gorenstein 特異点について、Yau の結果を一般化している。

2. 研究の目的

(1) 極大イデアルサイクルと基本サイクルとの一致について、今野 長島、Meng - 奥間の結果を、擬斉次の仮定の下でより幅広いクラスの特異点に拡張すること。

(2) 極大イデアルの特異点解消空間への引き上げで生じる埋め込み点を、種々の具体的特異点について明確にすること。

(3) 種々の複素 2 次元特異点について、Pencil 種数の値を決定すること。これは、複素 2 次元特異点と閉リーマン面の退化族の近さを測ることである。

(4) 複素 2 次元特異点の系列で意味のあるものを見つけ、その相互の標準サイクルの差を基本サイクルで記述すること。複素 2 次元特異点の系列として、意味のあるものとして、部分特異点系列を考えている。これは 2 つの特異点の一方の特異点解消空間が他方の特異点解消空間に含まれることを意味する。こうした包含関係で繋がっている系列を考えることは特異点研究の重要な視点を与える。

3. 研究の方法

(1) 今野 - 長島、Meng - 奥間の結果は、申請者により証明された巡回商特異点の巡回被覆の計算定理に依存して示された。本研究においても、同じ手法を用いる。また、擬斉次特異点についての Pinkham-Demazure 理

論も用いる。

(2) 埋め込み点については、まず $z^n=f(x,y)$ 型の超曲面特異点について考察する。ここでの技術的な基礎となるのも(1)と同様に巡回商特異点の巡回被覆の計算定理である。

(3) Pencil 種数の値の決定では、特異点解消空間に座標関数を引き上げ、例外集合上での零点の位数を比較するという地道な作業が基礎となる。そのために特異点解消のプロセスが明確な場合を主に考える。

(4) 複素 2 次元特異点の部分特異点系列の一つの構成法として、閉リーマン面の退化族を用いるものと、巡回被覆を用いるものがある。方法として両者を用いる。

4. 研究成果

(1) 擬斉次特異点に付随する affine 環は次数付きの環であるが、定理『極大イデアルの " 被約で同次な元で極大イデアルサイクルが与えられる " とき、極大イデアルサイクルと基本サイクルとの一致は中心曲線での両サイクルの係数の一致で与えられる。』を証明した。

上記の条件、" 被約で同次な元で極大イデアルサイクルが与えられる " は、Brieskorn 完全交叉特異点を含む幅広い特異点について言える。また、極大イデアルサイクルと基本サイクルとの一致については、中心曲線が有理曲線の場合については、「極大イデアルサイクルと基本サイクルとは常に一致するか？」という問題が、複素 2 次元特異点論の一つのテーマであったが、本研究ではその反例を与えた。なお、擬斉次特異点の最小良特異点解消の例外集合の形状は星形をしており、その中心に位置する曲線 (=閉リーマン面) を中心曲線という。

(2) $z^n=f(x,y)$ 型の超曲面特異点の極大イデアルの特異点解消空間への引き上げの埋め込み点について、 n の値が十分に大きい場合は完全に決定した。これは研究会の報告等には記述しているが、本論文の執筆はまだこれからである。この場合の結果は、一般の特異点の巡回被覆に拡張出来る可能性があり、今後その方向を研究継続し、それらの結果を含めた論文の作成を考慮している。

(3) これについても(2)と同様に、 $z^n=f(x,y)$ 型の超曲面特異点の場合に、ある条件下で、特異点自身の Pencil 種数が決定できた。従来は、弱 Kodaira 特異点以外の場合は、ほとんど分かっていなかった。定義と、上限と下限の一般的な評価はあるが、個々の特異点についての結果は、有理 2 重点のような特別な場合を除くとない。よって、弱 Kodaira 特異点

でない $z^n=f(x,y)$ 型超曲面特異点について、その Pencil 種数の値が決定できることは大きな進歩である。これについても、研究会報告等には記述しているが、本論文の執筆はまだこれからである。

(4) 特異点の巡回被覆特異点の場合に、その部分特異点系列を考察して、Yau 系列の長さ、最小サイクルと基本サイクルの一致、標準サイクル同士との差と基本サイクルの比較、幾何種数の挙動などの結果が得られている。これは現在、中国海南島での国際シンポジウムの Proceeding に向けて、その概要を執筆中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Tadashi Tomaru,
 C^* -equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with C^* -action. J. Math. Soc. Japan, 65 (3): 829-885, 2013 (査読あり).

Masataka Tomari and Tadashi Tomaru,
Maximal ideal cycles for normal surface singularities with \mathbb{C}^* -action, Tohoku Math. J. (査読有り、掲載受理: 2015.9)

Tadashi Tomaru,
Normal C^* -surface singularities whose maximal ideal cycles are greater than fundamental cycles and the central curves are \mathbb{P}^1 , Ann. Gunma Health Sci., Vol. 36, 1-6, 2015. (査読有り)

[学会発表](計 8 件)

[1] T. Tomaru,
 C^* -equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with C^* -action. Singularities in geometry and applications III, 2013 年 9 月 17 日、
dinburgh University, Scotland, UK

[2] 都丸正
2次元 C^* -特異点と閉リーマン面の C^* -作用付き退化族について、多変数関数論冬セミナー、2013 年 12 月 22 日、福島大学

[3] 泊昌孝、都丸正
2次元次数付き特異点と星形特異点の、極大イデアルサイクルと基本サイクルについて、日本数学会秋期年会函数論分科会、2014年9月16日、広島大学。

[4] 都丸正
 C^* -作用をもつ複素2次元特異点の極大イデアルサイクルについて、研究集会「特異点と多様体の幾何学」、2015年9月24日、草津セミナーハウス(群馬県草津町)、研究集会報告集の47-65頁に解説文あり。

[5] T. Tomaru,
Maximal ideal cycles for normal surface singularities with \mathbb{C}^* -action, Internet. Conferences on Singularity Theory-in Honor of Henry Laufer's 70's Birthday, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (清華三亜国際数学フォーラム) 2015年12月20日, 中華人民共和国、海南島三亜。

[6] 都丸正
Maximal ideal cycles for normal surface singularities, 「第3回代数幾何学研究集会 - 宇部 -」, 2016年1月10日、宇部工業高等専門学校。

[7] 泊昌孝、都丸正
有理曲線を中心曲線とする2次元次数付き特異点の極大イデアルサイクルについて、日本数学会学会春期年会、2016年3月17日、筑波大学。

[8] 都丸正
特異点列 $\{z^n = f(x, y) \mid n=2, 3, \dots\}$ の考察、極大イデアルサイクル・pencil 種数の視点から、代数幾何学ミニワークショップ、2016年3月17日、東京大学数理科学研究科。

〔図書〕(計 件)
〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都丸 正 (Tomaru Tadashi)
群馬大学・大学院保健学研究科・教授
研究者番号：70132579

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：