

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 12 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400066

研究課題名(和文) 等質空間上の複素構造と共形幾何学的構造についての研究

研究課題名(英文) Study of Complex Structures and Conformal Geometric Structures on Homogeneous Spaces

研究代表者

長谷川 敬三 (HASEGAWA, KEIZO)

新潟大学・人文社会・教育科学系・教授

研究者番号：00208480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：複素多様体論において、ケーラー構造の研究は中心的なテーマである。局所的にケーラー構造に共形な「局所共形ケーラー構造(LCK構造)」の研究として、コンパクト等質LCK多様体の構造定理「コンパクト等質LCK多様体は旗多様体上の1次元複素トーラスをファイバーとする正則ファイバーバンドルである」を示した。さらに、これらはすべてVaisman型であること、すなわち、LCK構造に付随するリー1形式がリーマン計量に関して平行であることを示した。研究活動の一環として、国際研究集会「複素幾何学とリー群」を、平成25年6月16日～20日、トリノ、イタリア、および、平成28年3月22日～26日、奈良、にて主催した。

研究成果の概要(英文)：In the field of Complex Geometry "Kaehler structure" is a central subject. As a study of locally conformally Kaehler structures (LCK structure for short) we have shown that a compact homogeneous LCK manifold is a holomorphic fibre bundle over a flag manifold with fiber a 1-complex torus. Furthermore, we have shown that they are all of Vaisman type, that is, its associated Lee form is parallel with respect to the Riemann metric.
As an important research activity during the period of this research project we have organised the international symposium "Complex Geometry and Lie Groups" in Torino, June 16-20, 2015 and in Nara, March 22-26, 2016.

研究分野：複素幾何学

キーワード：局所共形ケーラー構造 等質多様体

1. 研究開始当初の背景

複素多様体論において、ケーラー構造の研究は歴史的にも中心的なテーマと言えます。代数多様体を含むケーラー多様体に対して非ケーラー多様体の研究は比較的最近盛んになって来ています。複素等質多様体は、その多くはケーラー構造を許容しないため、また多くの場合にリー群やリー環の議論に帰着できることもあり、非ケーラー複素多様体の良い研究対象になっています。ケーラー構造の一般化として4元数ケーラー構造、超ケーラー構造等も最近、多くの論文の研究テーマになって来ています。

大まかに捉えると、コンパクト等質多様体はトーラスを除くと半単純型と可解型に分けられ、半単純型はケーラー構造を許容し、可解型はケーラー構造を許容しません。したがって、非ケーラー複素多様体の研究として、主に可解多様体が研究されています。

本研究課題に関係する、局所的にケーラー構造に共形な「局所共形ケーラー構造」はケーラー構造の自然な拡張と言え、ある意味でケーラー構造に近い構造です。例えば、非ケーラー複素曲面のほとんどが局所共形ケーラー構造を許容します。実際に、予想「複素変形を除いて、非ケーラー複素曲面はすべて局所共形ケーラー構造を許容する」も複素曲面論における一つの展望を与えます。一方、コンパクト可解多様体は複素構造が左不変なものに限ると局所共形ケーラー構造を許容するものは有限被覆を除いてハイゼンベルグ型といわれるものに限る、との予想をし、解決に向けて取り組んでいる。この予想は冪零多様体に関しては沢井氏によって示されています。また複素リー群の離散部分群による商多様体は局所共形ケーラー構造を許容しないことが本研究の主結果から導けます。

2. 研究の目的

前研究課題「コンパクトおよび非コンパクト等質空間上の複素構造についての研究」(基盤研究(C),平成23年~25年)による研究成果を踏まえて、本研究課題において、局所共形ケーラー多様体の構造をはじめとする、等質および局所等質多様体上の複素構造、非ケーラー複素幾何学的な構造を、分類論(Classification)、構造論(Structure Theory)、改変(Modification)および複素変形論(Deformation and Moduli space)の立場から研究し、またこの領域の研究を促進することを研究目的とする。国際的な研究交流、国際共同研を研究活動の一環としておこなう。

3. 研究の方法

研究をより効率化を行うために、また幅の広い視野を持って研究が行えるように共同研究のかたちで研究を進める。海外からも研究者を招聘し、国際的な研究会を開催し、講演、研究交流を通じて関連する研究を促進させる。

4. 研究成果

等質局所共形ケーラー多様体の研究に関する一連の論文[1, 2, 3]は掲載が決定している。特に、神島氏、AlekseevskyとCortesとの共著「Homogeneous locally conformally Kaehler and Sasaki manifolds」において、簡約型の等質な局所共形ケーラー多様体はそのイソトロピー群の正規化群がコンパクトのとき、いわゆるリー形式がリーマン構造に関して平行になる(Vaisman型)である、を示した。これは「コンパクト等質局所共形ケーラー多様体はVaisman型」という、前論文「Compact Homogeneous Locally Conformally Kaehler Manifolds」(神島氏(研究分担者)との共著)の主結果を拡張する結果になっている。また、非コンパクト簡約リー群上の局所共形ケーラー構造でVaisman型でないものがあることも分かった。

これらの諸結果を踏まえて、一般のリー群の等質Vaisman構造およびコンパクトな局所等質ケーラー多様体および局所等質Vaisman多様体の決定問題に取り組んでいる。

より具体的には、可解リー群上の等質Vaisman構造に関しては、4次元の場合は小平面はVaisman構造を許容し、一方、井上曲面は局所共形ケーラー構造は許容するが、Vaisman構造は許容しない。予想として「可解リー群が等質Vaisman構造を許容するのは一般小平多様体を定義する可解リー群の場合に限る」が得られる。なお、小平面は第1(primary)と第2(secondary)曲面があり、その一般化を一般小平多様体とよぶ。

コンパクト群を含む簡易型リー群上の等質局所共形ケーラー構造については、本研究の研究成果のひとつとして、決定された。

関連した問題として「コンパクト局所等質ケーラー多様体の分類」に取り組んでいる。等質ケーラー多様体の分類の結果を踏まえた、離散群との関わりも深い興味ある問題である。

リー群上の複素構造とその変形に関する研究として、次の予想をしている「冪零リー群上の等質複素構造は複素アフィン空間に双正則同値」および「冪零リー群上の等質複素構造の変形によって保たれる」これらの予想に関連する論文はすでにみられ、部分的な結

果も得られている。解決に向けて取り組みたい。

本研究課題の「研究実施計画」に基づく主な研究活動として、研究集会「Complex Geometry and Lie Group」を、2014年6月16日~20日、トリノ、イタリア、および2016年3月22日~26日、奈良、にて開催し、それぞれ世界各国から60名ほどの参加者があり、講演、研究交流を通して関連する研究分野の発展に大いに寄与できたと思う。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. K. Hasegawa and Y. Kamishima, Compact locally conformally Kaehler manifolds, Osaka Journal of Mathematics, Vol. 53 (2016). 印刷中(査読付)
2. K. Hasegawa and Y. Kamishima, Locally conformally Kaehler structures on homogeneous spaces, Progress in Mathematics, Vol. 308 (2015), 353-372. (査読付)
3. D. Alekseevsky, V. Cortes, K. Hasegawa and Y. Kamishima, Homogeneous locally conformally Kaehler and Sasaki manifolds, International Journal of Mathematics, Vol. 26 (06) (2015), 1-29. (査読付)
4. K. Moriya, Surfaces of constant mean curvature with symmetry, Israel Journal of Mathematics, Vol. 207 (2015), 331-359. (査読付)
5. T. Mabuchi, The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, Geometry and analysis on manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 308 (2015), 395--403. (査読付)
6. T. Mabuchi and Y. Nitta, Strong K-stability and asymptotic Chow-stability, Geometry and analysis on manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 308 (2015), 405--411. (査読付)
7. T. Mabuchi, Relative stability and extremal metrics, Journal of Mathematical Society of Japan, Vol. 66

(2014), 535--563. (査読付)

8. K. Honda and K. Tsukada, Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds, in Recent Trends in Lorentzian Geometry, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 26 (2013), 295-314. (査読付)

[学会発表](計6件)

1. K. Hasegawa, Compact locally homogeneous Kaehler and lcK manifolds, 第21回複素幾何学シンポジウム, 2015年10月(金沢大学). 招待講演
2. Y. Kamishima, Survey on spherical CR-structures and related geometric structures, Workshop on Geometric Structures, Hitchin Components and Representation Varieties, 2015年10月(KIAS, ソウル). 招待講演
3. K. Tsukada, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, 微分幾何学ワークショップ「部分多様体の幾何学とリー理論」, 2015年2月(大阪市立大学). 招待講演
4. K. Hasegawa, Non-Kaehler Geometric Structures on Homogeneous Spaces, Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, 2015年1月(岡山理科大学). 招待講演
5. Y. Kamishima, On Complex Contact Similarity Manifolds, Workshop on Analysis and Geometry in Several Complex Variables, 2014年12月(The Institute of Mathematics, Academia Sinica). 招待講演
6. K. Moriya, 四元数射影空間内のウィルモア正則曲線, 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」--Willmore 曲面について, 2014年2月(山口大学). 招待講演

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

研究集会「Complex Geometry and Lie Group」奈良，2016年3月22日～26日；

<https://sites.google.com/site/annafino/the-4th-workshop-complex-geometry-and-lie-groups>

6．研究組織

(1)研究代表者

長谷川 敬三 (HASEGAWA KEIZO)
新潟大学・人文社会・教育科学系・教授
研究者番号：00208480

(2)研究分担者

神島 芳宣 (KAMISHIMA YOSHINOBU)
城西大学・理学部・教授
研究者番号：10125304

(3) 研究分担者

塚田 和美 (TSUKADA KAZUMI)
お茶の水女子大学・大学院・人間文化創成科学研究科・教授
研究者番号：30163760

(4) 研究分担者

守屋 克洋 (MORIYA KATSUHIRO)
筑波大学・数理物理科学研究科・助教
研究者番号：50322011

(5) 連携研究者

満淵 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)
大阪大学・理学研究科・名誉教授
研究者番号：80116102