

令和元年5月12日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400068

研究課題名(和文) 離散幾何解析学としての量子ウォークの研究

研究課題名(英文) Quantum walks from a view point of discrete geometric analysis

研究代表者

楯 辰哉 (Tate, Tatsuya)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：00317299

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：量子ウォークとはランダムウォークの量子論的側面で、コンピュータサイエンスに多くの応用を持つ。例えばグローバーの量子検索アルゴリズムがAmbainisらによりグローバーウォークという量子ウォークの一種によって改良された経緯を持つ。本研究課題では量子ウォークの数学理論としての発展を念頭におき、その定性的性質を調べることに専念した。ランダムウォークの重要性の一つはその離散群論への応用であり、結晶格子理論でも重要な役割を演じる。そこで量子ウォークの離散幾何解析学的な問題を考察し、1次元斉次量子ウォークの代数的側面や結晶格子上的量子ウォークの設定やそのスペクトル論的な挙動についての結果などを得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上述の通り量子ウォークはコンピュータサイエンスなど応用面では活発に研究されているが、数学的な理論構築や定性的な性質の解明は遅れている。数学理論が構築されれば予見も可能となる可能性があり、応用面においてさらなる効果が期待できる。また通常の量子論においては、まずハミルトニアンがあり、それが生成するユニタリ時間発展作用素を考察する。一方量子ウォークはユニタリ作用素の定義する確率分布であり、その解析はユニタリ作用素を直接扱う数学分野として画期的である。今回定義した周期的ユニタリ推移作用素そしてそのスペクトル論的な研究成果はむしろ先駆的な結果であり、今後詳細な挙動を調べる方向の研究が期待される。

研究成果の概要(英文)：The notion of quantum walks is a quantum counterpart of the notion of random walks and it has many applications to computer sciences. For example, the Grover walk, which is one of typical quantum walks, is used to improve Grover's quantum search algorithm as discussed originally by Ambainis et al. In this research program, we focused on rather qualitative aspects of quantum walks because it would be very important to understand its qualitative aspects to find its further applications and develop its theory further in mathematics. One of importances of random walks are its applications to discrete group theory. Also random walks plays important roles in the theory of crystal lattices. Concerning with these facts, we mainly considered discrete geometric analytical problems for quantum walks in this program and we obtained results on such as algebraic structures of 1-dimensional homogeneous quantum walks and setting up of quantum walks on crystal lattices and their spectral behavior.

研究分野：幾何解析学

キーワード：量子ウォーク 周期的ユニタリ推移作用素 無限二面体群 ベキ乗公式 絶対連続スペクトル 固有値局在化

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は1次元斉次量子ウォークの大偏差原理とそのレート関数の導出が成功した段階で、それ自身大きな結果であった。その後より精密に1次元・2次元の量子ウォークを解析する動機が高まった。具体的にはハミルトン作用素の導出や、2次元における大偏差原理の導出、そして1次元での代数的な背景や半古典極限などの問題があった。また、これら低次元の研究だけではなく、一般の(斉次)量子ウォークをさらに結晶格子に拡張し、結晶格子の幾何学を使用して詳細に解析するという動機もあった。

2. 研究の目的

上記の背景のもとで、研究開始当初は1次元・2次元の斉次量子ウォークに対しては、表現論的位置付け、ハミルトン作用素の導出、ベキ乗の明示公式、(2次元一般の)弱極限公式や大偏差原理などの漸近解析など、そして一般の結晶格子の上の量子ウォークの定式化とその性質の解析を目的としていた。

3. 研究の方法

当初は、低次元(1次元・2次元)斉次量子ウォークに対しては、まずはベキ乗の明示公式を得て、それをういてハミルトン作用素の導出、弱極限公式や大偏差原理などの解析を行うという方法を想定していた。また、一般の結晶格子の上の量子ウォークに関しては、まずは解析しやすい方法で具体的なモデルを定式化して解析し一般の場合を模索する方法を検討していた。

4. 研究成果

実際の研究過程と成果を述べる。当初考えていたベキ乗公式は1次元については完全にうまくいき、ハミルトン作用素の導出も、想定した方法で成功した。しかしハミルトン作用素の形が解析の難しいものであり、現時点ではそこからさらなる情報を取り出すことに成功はしていない。また1次元の場合、ベキ乗公式は無限二面体群の関係式のみで得られた。2次元の場合も同様な理論展開が可能であろうと予想していたが、この方法でベキ乗公式が得られたのは、現在のところグローバークウォークのみである。より一般の量子ウォークに対してもアフィンワイル群の表現が重要となってくるだろうと現在も考えているものの、解析的には困難で時間がかかる。一方、当初気づいていなかった局在化の問題に取り組み、そこで周期的ユニタリ推移作用素というクラスの作用素を設定し、その連続スペクトルの絶対連続性を証明し、局在化が固有値のみで引き起こされることを示した。これにより高次元グローバークウォーク、2次元フリーウォークの解析(小松堯氏との共同研究)を解析しスペクトル論的成果が得られた。そして周期的ユニタリ推移作用素というクラスの作用素が実は砂田利一教授の導入した作用素のクラスと本質的には同等であることがわかった。なお、X.Luo氏との共同研究において、グローバーク型の量子ウォークを単体複体に拡張し、そのスペクトル論的な性質と単体複体の位相幾何学的な性質との関連に関する成果も得ることができた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計5件)

(1) [Tatsuya Tate](#), An algebraic structure for one-dimensional quantum walks and a new proof of the weak limit theorem, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* Vol.16, No.2(2013) 1350018.
(DOI: 10.1142/S0219025713500185)

(2) [Tatsuya Tate](#), The Hamiltonians generating one-dimensional discrete-time quantum walks, *Interdisciplinary Information Sciences* Vol. 19, No. 2 (2013) 149-156.
(DOI: 10.4036/iis.2013.149)

(3) [Tatsuya Tate](#), Quantum walks in low dimension, In: Kielanowski O., Ali S., Bieliavsky P., Odziejewicz A., Schlichenmaier M., Voronov T. (eds) *Geometric Method in Physics. Trends in Mathematics XXXIV*, pp.261-278.
(DOI: doi.org/10.1007/978-3-319-31756-4_21)

(4) Takashi Komatsu and [Tatsuya Tate](#), Eigenvalues of quantum walks of Grover and Fourier types, *J. Fourier Anal. Appl.* (2018)
(DOI: 10.1007/s00041-018-9630-6)

(電子版のみ出版された状況で、まだ volume 等の情報はない。)

(5) Xin Luo and [Tatsuya Tate](#), Up and down Grover walks on simplicial complexes, *Linear Alg. Appl.* Vol. 545 (2018), 174-206.
(DOI: 10.1016/j.laa.2018.01.036)

〔学会発表〕(計 11 件)

(1) 楯辰哉「一次元量子ウォークの諸相」第 60 回幾何学シンポジウム, 東京工業大学(東京都目黒区), 2013 年 8 月 27 日(基調講演).

(2) Tatsuya Tate, “Various aspects of one-dimensional quantum walks”, JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013, Special Session on “Analysis of graphs and graph algorithms”, 東京大学(東京都目黒区), 2013 年 11 月 4 日(招待講演).

(3) Tatsuya Tate, “Asymptotics of one-dimensional quantum walks”, 2014 Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on “Quantum Walks, Quantum Computation, and Related Topics” Baltimore, USA, 2014 年 1 月 18 日(一般講演).

(4) 楯辰哉「一次元・二次元の量子ウォーク」, 2014 年日本数学会年会特別講演, 学習院大学(東京都豊島区), 2014 年 3 月 17 日(招待講演).

(5) Tatsuya Tate, “Powers of certain quantum walks”, 16th Workshop: Non-commutative harmonic analysis, Bedlewo, Poland, 2014 年 7 月 10 日(招待講演).

(6) Tatsuya Tate, “Localization, eigenvalues and absolute continuity for periodic unitary transition operators”, international conference on “Quantum Simulation and Quantum Walks 2014”, Durban, South Africa, 2014 年 11 月 28 日(招待講演).

(7) Tatsuya Tate, “Powers of certain quantum walks” 2015 Joint Mathematics Meetings, San Antonio, USA, 2015 年 1 月 13 日(一般講演).

(8) Tatsuya Tate, “Quantum walks in one dimension”, XXXIV Workshop on Geometric Method in Physics, Bialowieza, Poland, 2015 年 7 月 1 日(招待講演).

(9) Tatsuya Tate, “Localization for periodic unitary transition operators”, 2016 Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on “Quantum Walks, Quantum Markov Chains, Quantum Computation and Related Topics”, Seattle, USA, 2016 年 1 月 8 日(一般講演).

(10) Tatsuya Tate, “Quantum walks defined by periodic unitary transition operators”, The 2nd China-Japan Geometry Conference, Fuzhou, China, 2016 年 9 月 8 日(招待講演)

(11) Tatsuya Tate, “Quantum walks defined by periodic unitary transition operators”, GEOQUANT 2017 Conference, Sonderborg, Denmark, 2017 年 8 月 11 日(招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等
なし。

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。