

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400069

研究課題名(和文)ミラー対称性の大域的構造

研究課題名(英文)Global structure of mirror symmetry

研究代表者

入谷 寛 (Iritani, Hiroshi)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20448400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：ミラー対称性の大域的性質を通じてグロモフ・ウィッテン理論を調べた。具体的には(1) Coates, Corti, Tsengとはトーリック軌道体の完全交差に対するミラー定理を証明し、(2) Coates, Jiangとは、これらの空間に対するクレパント解消予想を証明し、連接層の導来圏の同値との関係を示し、(3) Coatesとは高種数理論に対するFock層の理論を構築し、ポテンシャルのある種の保型性を明らかにし、(4) Galkin, GolyshevとはFano多様体に対するガンマ予想を定式化した。ほかにも量子K理論や量子Serre双対性、端転移と量子コホモロジーの関係、についての成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：We studied Gromov-Witten theory through global mirror symmetry. More concretely, (1) we proved a mirror theorem for complete intersections in toric orbifolds with Coates, Corti and Tseng; (2) we proved the crepant transformation conjecture for these spaces and showed that it is related to equivalences between derived categories of coherent sheaves with Coates and Jiang; (3) we constructed a theory of Fock sheaves for higher genus theory and showed a certain modularity of the potential with Coates; (4) we formulated Gamma conjecture for Fano manifolds with Galkin and Golyshev. We also obtained results on quantum K-theory, quantum Serre duality and a relationship between extremal transitions and quantum cohomology.

研究分野：幾何学

キーワード：量子コホモロジー グロモフ・ウィッテン理論 ミラー対称性 トーリック多様体 ランダウ・ギンズ
ブルグ模型 軌道体 ファノ多様体 導来圏

1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性とは複素幾何学とシンプレクティック幾何学との間の双対性であり、超弦理論に起源を持つものであるが、現在では数学においても活発に研究されている。

研究代表者は Hodge 理論的なミラー対称性を研究してきた。これはシンプレクティック多様体の量子コホモロジーの定める Hodge 構造の変動と、複素多様体の複素構造の変形に付随した Hodge 構造の変動とを比較するものである。一般にシンプレクティック幾何の定める Hodge 構造はある形式的冪級数環(Novikov 環)上の対象として定義され、大域的あるいは解析的なものとしては与えられない。一方複素幾何から現れる Hodge 構造の変動は大域的に定まる。したがって、ミラー対称性の描像からは、シンプレクティック多様体の定める Hodge 構造の変動が大域的な対象に解析接続されることが予想される。さらに、異なるシンプレクティック多様体に付随する Hodge 構造の変動が互いに解析接続でつながる現象(クレパント変換予想)や、様々なシンプレクティック多様体のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数が保型形式で記述されること、などの興味深い現象が観察されていた。

2. 研究の目的

(1) グロモフ・ウィッテン理論の解析接続と双有理幾何との関係を明らかにすること。特に標準類を保つ双有理変換(K 同値あるいはクレパント変換)によって移りあう 2 つの多様体のグロモフ・ウィッテン理論の間の関係(関手性)を調べ、クレパント変換予想を示す。さらにグロモフ・ウィッテン理論と連接層の導来圏との関係を明らかにする。また、標準類を保たない双有理変換(滑らかな中心での爆発など)や、extremal transition (端転移)の下でのグロモフ・ウィッテン理論の関係を調べる。

(2) 高種数グロモフ・ウィッテン不変量の生成母関数がある Fock 層の切断と見なしてその大域的性質を調べる。これは高種数におけるクレパント変換予想の研究とかわる。Fock 層の切断が満たすべき正則異常方程式(holomorphic anomaly equation)や可積分階層の構造を系統的に調べる。さらに高種数グロモフ・ウィッテン不変量の母関数のある種の保型性についても調べる。

3. 研究の方法

(1) グロモフ・ウィッテン理論の解析接続について、ミラー対称性を使った研究を進める。特に、研究代表者の提案したガンマ整構造を使って、グロモフ・ウィッテン理論の間の関手性を多様体の K 群や導来圏と結びつけて考察する。ここでガンマ整構造とはベクトル

束の K 群から量子コホモロジーの平坦切断の空間への写像であって、ガンマ類と呼ばれる特性類を使って記述される。ガンマ整構造を通じて、グロモフ・ウィッテン理論の間の関係が、導来圏の間のフーリエ・向井変換から誘導されることを検証する。

(2) 量子コホモロジー微分方程式の不確定特異点に付随するストークス構造を、上記のガンマ整構造と結びつけて研究する。ミラー対称性からは、ガンマ整構造とストークス構造が整合的であることが期待され、量子微分方程式の形式構造およびストークス構造は導来圏や K 群の構造を反映すると予想される。さらにガンマ整構造がミラー対称性と整合的であることを様々な例を通じて検証していく。

(3) Coates との研究では、Givental の量子化の形式を大域化することにより、Fock 層の概念を得た。この Fock 層の構造の研究を進め、高種数グロモフ・ウィッテン理論の大域的構造(保型性、正則異常方程式)を調べる。

4. 研究成果

(1) Coates, Corti, Tseng らとの研究においては、トーリック軌道体及びその中の完全交差に対する一般のミラー定理を得た。トーリック軌道体を記述する扇が入っている格子 N 内の任意の有限集合 S に対して、「拡張された I 関数」を定義し、局所化公式と Givental-Brown の手法を用いることで、拡張された I 関数が「Givental 錐」上にあることを証明した。このミラー定理はトーリック軌道体の大量子コホモロジーを決定するだけの情報を持っている。本結果は *Compositio. Math.* に掲載された。

(2) Milanov, Tonita との研究において、量子 K 理論に現れる q 差分構造を研究した。グラフ空間(graph space)を用いて q 差分作用素の新しい幾何学的定義を与え、さらに q 差分構造を用いた量子 K 理論の再構成定理を証明した。この道具立てを用いて、量子 K 理論の収束性のある条件の下で証明し、旗多様体 $F(1,2,3)$ の小量子 K 群のある種の有限性を証明した。本結果は *Int. Math. Res. Notices* に掲載された。

(3) Galkin, Golyshev との研究においては Fano 多様体の量子微分方程式とガンマ類との関係を調べ、ガンマ予想として定式化した。これは指数定理の平方根と見なすべきものであって、量子微分方程式の不確定特異点の周りで最も早く指数減衰する平坦切断がガンマ類に対応する、という予想である。この予想を認めると、量子微分方程式から多様体の特性類であるガンマ類が復元できることになる。さらに量子コホモロジーが半単純で

あり、接続層の導来圏が full exceptional collection を持つとき、Dubrovin 予想を精密化して、中心接続行列がガンマ類を使って記述できると予想した。またこれらの予想をトーリック多様体やその中の完全交差、またグラスマン多様体に対して検証した。本結果の一部は Duke. Math. J. に掲載受理された。

(4) Coates, Jiang との研究において、種数 0 のクレパント変換予想をトーリック軌道体内の完全交差に対して証明した。さらに、クレパント変換の下での量子コホモロジーの間の関係が、ガンマ構造を通じて、あるフーリエ・向井変換から誘導されることを証明した。トーリック軌道体自体に対しては、さらに同変量子コホモロジーの間の関係も証明している。これらの証明には、(1)で述べたミラー定理と拡張された I 関数の解析接続を用いる。本結果はプレプリントとして公開している。

(5) Mann, Mignon との研究において、量子 Serre 定理を量子 D 加群の間の双対性として再定式化を行った。またそのことから、ある convex ベクトル束 E に対して、双対ベクトル束 E^* の全空間の量子 D 加群、 E の正則な切断の零点集合の量子 D 加群、 E とオイラー類でねじられた量子 D 加群、の三者の間の関係を記述した。さらに、ある Fano 多様体 X のカラビ・ヤウ超曲面 Y に対する量子 D 加群が X の第二構造接続として記述できることも示した。本結果は Int. Math. Res. Notices に掲載された。

(6) Coates との研究において、Fock 層の研究をさらに進め、グロモフ・ウィッテン不変量の母関数などの Fock 層の切断が満たすべき特異性を注意深く記述することにより、Fock 層の正確な定式化を行った。さらに Fock 層における(幾何学的量子化の意味での)偏極が局所的に一定ではない状況を考え、一般の異常方程式(anomaly equation)を定式化した。その特別な例として、下部構造である Hodge 構造に実構造を仮定することにより、正則異常方程式を導いた。またコンパクトトーリック軌道体に対するミラー対称性と Givental-Teleman の公式を応用して、コンパクトトーリック軌道体の高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルがある種の保型性を持つことを証明した。本結果はプレプリントとして公表している。

(7) Xiao との研究において、量子コホモロジーが多様体の端転移(extremal transition)の下でどのように変化するかを調べた。端転移とは滑らかな多様体のある部分多様体をつぶすことによって特異点をもつ空間を作り、さらにそれを滑らかな多様体に変形する(平滑化する)操作のことであり、コーニフォールド転移などが有名である。本

研究では、平滑化後の多様体の量子コホモロジーがつぶす前の多様体の量子コホモロジーの部分商として現れることを予想し、コーニフォールド転移やグラスマン多様体のトーリック退化のいくつかの例において検証した。本結果はプレプリントとして公表している。

(8) 同変量子コホモロジーに対して定義される「シフト作用素」と呼ばれるものを用いてトーリック多様体に対する Givental のミラー定理の簡単な別証明を与えた。シフト作用素とは Seidel 表現の同変版として与えられる。特に、 I 関数はシフト作用素を用いた線形微分方程式の解として特徴づけられることが分かった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

1. Hiroshi Iritani, Shift operators and toric mirror theorem, *Geometry & Topology* に掲載決定, 査読有

2. Sergey Galkin, Vasily Golyshev, Hiroshi Iritani, Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures, *Duke. Math. J.* に掲載決定, DOI:10.1215/00127094-3476593 査読有

3. Hiroshi Iritani, Etienne Mann, Thierry Mignon, Quantum Serre theorem as a duality between quantum D -modules, *Int. Math. Res. Not.* (2016), Vol 2016, Issue 9, 2828-2888, DOI:10.1093/imrn/rnv215 査読有

4. Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, A mirror theorem for toric stacks. *Compos. Math.* 151 (2015), no. 10, 1878-1912. DOI:10.1112/S0010437X15007356 査読有

5. Tom Coates, Hiroshi Iritani, On the convergence of Gromov-Witten potentials and Givental's formula. *Michigan Math. J.* 64 (2015), no. 3, 587-631. DOI: 10.1307/mmj/1441116660 査読有

6. Hiroshi Iritani, Todor Milanov, Valentin Tonita, Reconstruction and convergence in quantum K-theory via difference equations. *Int. Math. Res. Not.* IMRN 2015, no. 11, 2887-2937. DOI: 10.1093/imrn/rnu026 査読有

[学会発表](計32件)

以下の学会発表における発表者は全て研究

代表者(入谷 寛)であるため発表者名は省略する。

1. 2016年3月17日, 筑波大学(茨城県・つくば市)「ガンマ類とグロモフ・ウィッテン理論」日本数学会年会 総合講演

2. 2016年3月8日, 10日, 京都大学(京都府・京都市), Introduction to Gamma conjecture (8日) Hodge-theoretic mirror symmetry for toric stacks(10日), Tropical Geometry and Related Topics

3. 2016年1月27日, 東京大学(東京都・目黒区), Mirror symmetry for toric stacks, Algebraic and arithmetic geometry

4. 2016年1月11日, ANU Kioia campus (オーストラリア), Shift operators and toric mirror symmetry, Gromov-Witten theory, Gauge-theory and Dualities.

5. 2015年11月24日, KKR Hakodate (北海道・函館市), Global B-model for weighted homogeneous singularities, Quantum singularity theory and mirror symmetry.

6. 2015年11月16日, Kavli IPMU(千葉県・柏市), Mirror Symmetry for toric stacks and its application, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry II.

7. 2015年11月2日, The Chinese University of Hong-Kong 香港(中国), Global mirror symmetry for toric stacks and its application, East Asian Symplectic Conference 2015 Hong-Kong.

8. 2015年10月30日, 31日, HKUST (The Hong-Kong University of Science and Technology), 香港(中国), Introduction to Gamma conjecture (30日), A Fock Sheaf for Givental Quantization (31日, 1st talk), Shift operator and toric mirror symmetry (31日, 2nd talk), Seminar on Geometry

9. 2015年10月10日, Beijing International Center for Mathematical Science 北京(中国), Introduction to Crepant Transformation Conjecture (talk 1), Mirror Symmetry, gamma structure and crepant transformation conjecture for toric stacks (talk 2), Beijing Geometry and Physics colloquium.

10. 2015年9月25日, Imperial College London, ロンドン(イギリス), Mirror symmetry for toric varieties via shift

operators, MAGIC seminar

11. 2015年9月14日, 京都産業大学(京都府・京都市), 「トーリック多様体のミラー対称性」日本数学会秋季総合分科会, 幾何学分科会, 特別講演

12. 2015年7月27日, University of Tokyo (東京・目黒区), Constructing mirrors via shift operators, Trends in Modern Geometry 2015 & 10th Pacific Rim Complex Geometry Conference

13. 2015年7月24日, University of Utah ユタ州(アメリカ合衆国), Constructing mirrors via shift operators, AMS Summer Institute in Algebraic Geometry

14. 2015年4月22日, Oberwolfach(ドイツ), Constructing mirrors for big quantum cohomology of toric varieties, Mirror symmetry, Hodge theory and differential equations

15. 2015年3月16日, 17日, Kavli IPMU(千葉県・柏市), Toric mirror symmetry via shift operators, FMSP Lectures

16. 2015年3月13日, Yau Mathematical Sciences Center, 北京(中国), Toric mirror symmetry via shift operators, Introduction to Modern Mathematics Lecture Series

17. 2015年2月18日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市), Gamma conjecture for Fano manifolds, The 10th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar

18. 2015年1月12日, 立教大学(東京都・豊島区), Difference equations in equivariant quantum cohomology and toric mirror symmetry, Workshop Rikkyo MathPhys 2015

19. 2014年11月21日, Simons Center, Stony Brook (アメリカ合衆国), The Crepant Transformation Conjecture in the Toric Case, Wall Crossing, Quantum Integrable Systems, and TQFT

20. 2014年9月13日, MPI Bonn(ドイツ), Gamma class and quantum cohomology, Motivic structures on quantum cohomology and pencils of Calabi-Yau motives, final reports.

21. 2014年7月28日, KIAS, ソウル(韓国),

Gamma Conjectures for Fano manifolds, Seoul ICM 2014 Satellite conference, Geometry and Physics of Gauged Linear Sigma Models and Its Related Topics.

22. 2014年6月30日--7月4日 Pingree Park Campus, Colorado State University, コロラド州(アメリカ合衆国), Toric mirror symmetry, 連続講義(4回), Summer School in Gromov-Witten theory

23. 2014年5月15日, Simons Center, USA, Equivariant quantum cohomology of toric stack, Equivariant Gromov-Witten Theory and Its Applications

24. 2014年4月29日 Palazzone di Cortona, イタリア, Gamma Conjectures for Fano Manifolds, Mirror Symmetry and Spin curves

25. 2014年3月4日, University of Michigan, Ann Arbor (アメリカ合衆国), A Fock sheaf for Givental quantization, Conference on B-model Gromov-Witten theory

26. 2014年2月19日, 豊岡市役所城崎総合支所(兵庫県・豊岡市), 「Gromov-Witten 理論における量子化」, 城崎新人セミナー

27. 2014年2月14日, カブリ IPMU (千葉県・柏市), Gamma Conjectures for Fano manifolds, Primitive forms and related subjects,

28. 2014年1月10日, 台北大学, 台北(台湾), Gamma Conjectures for Fano manifolds, Calabi-Yau geometry and mirror symmetry

29. 2013年12月25日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), Gamma Conjectures for Fano manifolds, ミラー対称性の展望

30. 2013年10月17日, Institute of Mathematics, AMSS, 北京(中国), Fock sheaf of Givental quantization, Algebraic Geometry in East Asia 2013,

31. 2013年9月17日, SISSA, Trieste (イタリア), Fock sheaf of Givental quantization, Hamiltonian PDEs, Frobenius Manifold and Deligne-Mumford moduli spaces.

32. 2013年6月25日, 上海交通大学, 上海(中国), Fock sheaf of Givental quantization, The Second Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

入谷 寛 (IRITANI, HIROSHI)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 20448400

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: