

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400070

研究課題名(和文)幾何学における標準形理論の構築

研究課題名(英文)The construction of canonical form theory in geometry

研究代表者

井川 治 (Ikawa, Osamu)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授

研究者番号：60249745

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1) コンパクト連結単純リー群とその上の対合から、ある超極作用が定まる。この超極作用の軌道空間と個々の軌道の性質について調べた。得られた結果は極大トーラス理論の自然な拡張である。

(2) コンパクト型エルミート対称空間内の二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件と、そのときの交叉を対称三対を利用して調べた。さらにその結果を複素旗多様体内の実形の場合に拡張した。

研究成果の概要(英文)：(1) For a given compact connected simple Lie group and an involution on it, we can define a hyperpolar action. The author studied the orbit space and the properties of each orbit of the action. The result is a natural extension of maximal torus theory.

(2) We studied the necessary and sufficient condition that two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type intersect discretely. When the intersection is discrete we expressed the intersection as the orbit of a Weyl group which is defined by a symmetric triad. Moreover we generalized the result when the ambient space is a generalized flag manifold.

研究分野：幾何学

キーワード：対称三対 対称空間 超極作用 実形 Hermann作用

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 標準形理論は線形代数学の中心的役割を果たす。最も印象的なものは任意の実対称行列は直交行列で対角化できるという事実である。少し見方を変えると、実対象行列全体に直交群が自然に作用し、直交群による任意の軌道が実対称行列全体のなす部分空間と必ず交わると言い換えることができる。交点において軌道と部分空間は直交している。このようにみるとリーマン幾何学の範疇でも標準形理論があって然るべきである。この意味での標準形理論の一つは定式化されていて、超極作用と呼ばれる。すなわち、リーマン多様体にリー群が等長的に作用しているとき、その作用が**超極作用**であるとは、閉平坦全測地的部分多様体が存在して、任意の軌道がその閉平坦全測地的部分多様体と直交して交わる場合をいう。そのような閉平坦全測地的部分多様体は**切断**と呼ばれる。コンパクト連結リー群の随伴作用やコンパクト対称空間のイソトロピー群の作用は超極作用である。Hermann は現在では Hermann 作用と呼ばれる超極作用をコンパクト対称三対から構成した(1962年)。しかし、この時点では軌道全体のなす空間(軌道空間)や個々の軌道の性質を詳しく調べることはできなかった。2011年、筆者は既約ルート系の概念を拡張した**重複度付き対称三対**の概念を定義し、それを用いて、可換な Hermann 作用の軌道空間と個々の軌道の詳しい性質を組織的に詳しく調べられるようになった。

(2) ケーラー多様体の反正則対合的等長変換の不動点集合を $\{\mathbf{bf}$  実形 $\}$ という。実形は全測地的 Lagrange 部分多様体になる。竹内勝(1984年)はコンパクト型エルミート対称空間内の実形を分類した。田中真紀子・田崎博之はコンパクト型エルミート対称空間内の互いに合同な二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件と、そのときの交差を決定した。これを応用して入江・酒井・田崎は合同な二つの実形に関する  $Z_2$  係数 Floer ホモロジーを求めた。しかし、互いに合同でない二つの実形の交叉については調べることができなかった。

本研究はこれらに続くものである。

## 2. 研究の目的

(1) リーマン幾何学における標準形理論を構築し、深化させること。たとえば、非可換 Hermann 作用の軌道空間を決定し、個々の軌道の詳しい性質を調べること。

擬リーマン対称空間や非コンパクト型リーマン対称空間における標準形理論を構築すること。

(2) コンパクト型エルミート対称空間内の互いに合同ではない二つの実形が離散的に交

わるための必要十分条件と、そのときの交叉を記述すること。

## 3. 研究の方法

(1) 擬リーマン対称空間や非コンパクト型リーマン対称空間における標準形理論をどのように定式化するかを Jensen の定理のような由緒正しい結果から探る。また、個々の軌道のどのような性質に注目すべきかを探る。

(2) ケーラー多様体内の実形は定義から反正則対合的等長変換の不動点集合になる。二つの実形を定める反正則対合的等長変換から正則等長変換群上の二つの対合が誘導されるので、それを用いて対称三対が定義できる。これを用いて交叉が離散的になるための必要十分条件と、離散的な場合の交叉の記述を行う。

## 4. 研究成果

(1) 研究は当初計画していたものとは予想外の方向に進展した。

コンパクトリー群とそのうえの自己同型写像から、コンパクトリー群自身へのある超極作用が定義される。その作用は**シグマ作用**と呼ばれる。自己同型写像が恒等写像の場合には、得られるシグマ作用は随伴作用になる。より一般に自己同型写像が内部型の場合には得られるシグマ作用は本質的に随伴作用になる。随伴作用には多くの研究があるので、それ以外の場合について考えたい。すなわち、外部型の自己同型写像から得られるシグマ作用について考察した。2014年、古典型のコンパクト連結単純リー群のシグマ作用について調べ、結果を ICM サテライトで発表した。2015年、さらに結果を一般のコンパクト連結単純リー群の場合に拡張した。得られた結果は論文に等長変換のまとめ投稿中である。これらの結果はコンパクト連結リー群の極大トーラス理論の自然な拡張になっている。シグマ作用の考察は、間下克哉(法政大学)と奥田(広島大学)との共同研究による次のような応用を生んだ。一般にコンパクト対称対  $(G, K)$  を考える。  $G$  の階数と  $K$  の階数が一致するときには、  $K$  のワイル群は  $G$  のワイル群の部分群になるが、それらの階数が一致しないときには、部分群になるかどうかは明らかではない。  $K$  を定める対合から対称三対を構成すると、自然に  $K$  のワイル群と  $G$  のワイル群の間にある群が定義され、これを通じて  $K$  のワイル群が  $G$  のワイル群の部分群となることが明らかとなった。得られた結果を論文にまとめる予定である。

(2) ケーラー多様体内の実形は定義から反正則対合的等長変換の不動点集合になる。実形を定める反正則対合的等長変換からケーラ

一多様体の正則等長変換群の上に対合が誘導される．このようにしてコンパクト型エルミート対称空間に二つの実形があれば，二つの対合が誘導される．この二つの対合から対称三対が構成され，それを用いてコンパクト型エルミート対称空間内の二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件を記述できた．また，交叉が離散的のとき，対称三対の定めるワイル群を用いて交叉を記述することができた(田中-田崎との共同研究)．さらに，同様の方法で一般化された複素旗多様体内の二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件と，交叉が離散的のとき，その交叉を記述できた(入江-奥田-酒井-田崎との共同研究)．得られた結果は日本数学会で発表した．また，論文にまとめる予定である．

5．主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Q. Ikawa, Moment maps associated with holomorphic isometric actions on Kahler manifolds. J. Geom. 103 (2012), no. 2, 275~284. 53Dxx (32M05 32Q15)

Q. Ikawa, A note on symmetric triad and Hermann action. Differential geometry of submanifolds and its related topics, 220~229, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014.

Q. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry and the intersection of two real forms in the complex Grassmann manifold. Real and complex submanifolds, 319~327, Springer Proc. Math. Stat., 106, Springer, Tokyo, 2014. 58C30 (32V40)

Q. Ikawa, Canonical forms under certain actions on the classical compact simple Lie groups. Real and complex submanifolds, 329~338, Springer Proc. Math. Stat., 106, Springer, Tokyo, 2014. 57S25 (22E46)

Q. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads. Internat. J. Math. 26 (2015), no. 6, 1541005, 32 pp. 53C35 (32M15)

[学会発表](計11件)

平成25年(2013年)2月3日, 井川治, The geometry of orbits of Hermann actions, 第6回大阪市立大学数学研究所-慶北国立大学G R G共催 微分幾何学ワークショップ, 「対称空間の部分多様体論と有限次元および無限次元リー理論」

平成25年(2013年)8月23日, 井川治, 二つの実形の交叉と対称三対, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」  
於 東京理科大学

2013.11.23, 井川治, 正則等長変換の不動点集合、実形の交叉と対称三対,  
部分多様体論・湯沢2013

2014.5.24, 井川治, 対称三対とその応用,  
秋葉原微分幾何セミナー

2014.6.27, 井川治 Symmetric triads and thier applications,  
京都大学数理解析研究所 研究集会

2014.8.10, Q. Ikawa, Canonical forms under certain actions on the classical compact simple Lie groups,  
ICM Satellite conference, Korea.

2014.8.24, 井川治,  
対称三対の実形の交叉への応用, 第61回幾何学シンポジウム,  
於 名城大学

2014.9.25-28, 井川治,  
対称三対の基礎と応用,  
日本数学会秋季総合分科会 幾何学分科会特別講演、於 広島大学

2015.3.10, 井川治, コンパクトリー群へのある作用の標準形, 「幾何構造の融合と発展」名城大学

2015.3.22, 奥田隆幸, 井川治, 入江博, 酒井高司, 田崎博之, 複素旗多様体内の二つの実形の交叉,  
日本数学会年会, 於 明治大学

2015(H27).12.5, 井川治, 二つの佐武図形による重複度付き対称三対の決定(I),  
神楽坂幾何学セミナー, 東京理科大学

[図書](計0件)

〔産業財産権〕

出願状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井川 治 (Ikawa, Osamu)  
京都工芸繊維大学・基盤化学系・教授  
研究者番号：60249745

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：